Analysis III

Prof. Dr. B. Dreseler

WS 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

Literatur

I. Einige Bücher zur Integrationstheorie:

[K] K. Königsberger, Analysis 2, Springer-Lehrbuch (1993)
[A] H. Amann, J. Escher, Analysis III, Birkhäuser (2009)
[F] O. Forster, Analysis III, Vieweg
[R] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill (1987)

I. DAS LEBESGUESCHE INTEGRAL

1 Einführung

Das Ziel dieses ersten Teils der Vorlesung ist es, die Integrationstheorie, welche bisher nur für Funktionen einer Veränderlichen entwickelt worden ist, auf Funktionen in mehreren Veränderlichen auszudehnen. Ferner soll selbst im 1-dimensionalen Fall die Klasse der „integrierbaren“ Funktionen erheblich vergrößert werden. In der Analysis II wurde das **Riemannsche Integral** behandelt, zumindest für die Klasse der sogenannten Regelfunktionen (je nach Zugang).

Der Riemannsche Integralbegriff hat sich jedoch in mancherlei Hinsicht als unbefriedigend herausgestellt.
Der eine Grund dafür liegt darin, dass es diverse Funktionen gibt, denen man auf sinnvolle Weise ein Integral zuordnen sollte, welche jedoch nicht Riemannsch integrierbar sind.

Ein Beispiel dafür ist die **Dirichlet-Funktion** $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational}. \end{cases}$$

Diese ist nicht Riemannsch integrierbar, obwohl es gute Gründe gibt, ihr das Integral 0 zuzuordnen (vgl. Aufgabe 1.1). Beachte dazu, dass φ die charakteristische Funktion $\varphi = \mathbb{1}_A$ der Menge $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist, der man nach Aufgabe 1.1 sinnvollerweise den 1-dimensionalen Inhalt 0 zuordnen würde.

Dieses Beispiel zeigt zudem eine weitere fundamentale Fragestellung auf:

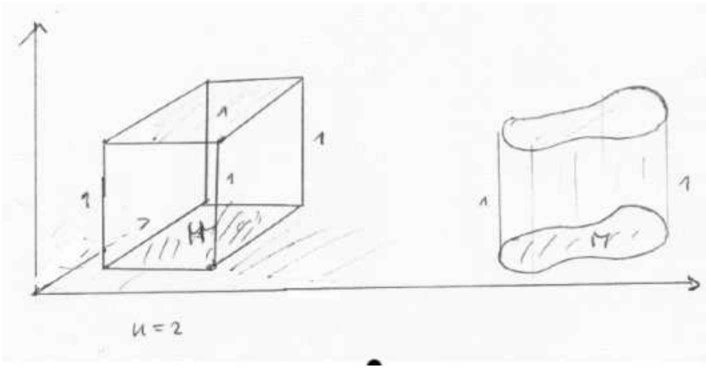
Kann man beliebigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner des $\mathbb{R}^n$) auf sinnvolle Weise einen 1-dimensionalen (oder allgemeiner einen n-dimensionalen) *Inhalt* (oft auch *n-dimensionales Volumen* genannt) zuordnen, d.h. den Inhalt „messen“ ?

Z.B. hätte das Intervall $I := [a,b]$ den 1-dimensionalen Inhalt $v_1(I) := (b-a)$ (dies ist gerade die Länge $|I|$ des Intervalls), allgemeiner hätte ein Quader $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ im $\mathbb{R}^n$ das n-dimensionale Volumen $v_n(Q) := (b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)$, und der Menge $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ aus obigem Beispiel würde man nach Aufgabe 1.2 gerne den 1-dimensionalen Inhalt $v_1(A) := 0$ zuweisen.

Diese Frage führt in das Gebiet der **Maßtheorie**, die sich, grob gesagt, mit dem „Messen“ von Mengen beschäftigt (s. z.B. [R]). Nun hängen Maß und Integral anschaulich sehr eng zusammen:
Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner des $\mathbb{R}^n$), so sollte der 1-dimensionale Inhalt $v_1(M)$ (bzw. allgemeiner das n-dimensionale Volumen $v_n(M)$) von M gleich

dem Integral der charakteristischen Funktion von M sein (vorausgesetzt, dieses Integral existiert!), d.h. folgende Formel sollte in einer gescheiten Integrationstheorie gelten:

$$v_n(M) = \int \mathbb{1}_M(x)\,dx. \tag{1.1}$$



Wir werden daher i.W. [K] folgen und zunächst den Integralbegriff ausdehnen auf den des Lebesgueschen Integrals, und anschließend die Identität (1.1) zur *Definition* des Inhaltes oder Maßes $v_n(M)$ heranziehen. Wie wir allerdings sehen werden, ist es nicht möglich, beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf sinnvolle Weise ein n-dimensionales Volumen zuzuweisen, sondern nur den „Lebesgue-messbaren“ Mengen. Mengen, die nicht messbar sind, sind allerdings nur schwer zu finden (mit Hilfe des Auswahlaxioms!) .

In der abstrakten Maßtheorie geht man in der Regel einen anderen Weg, und definiert zunächst das Maß geeigneter „messbarer“ Mengen, und definiert damit im Anschluss das Integral (vgl. hierzu die Bemerkung im Anschluss an Theorem 11.7). Dieser Zugang ist allerdings zeitaufwändiger.

Ein weiterer, struktureller Grund für die Ausdehnung des Integralbegriffs ist der folgende: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemannsch integrierbar, so können wir in Analogie zur ℓ^1-Norm setzen

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx.$$

Man zeigt sofort, dass $\|\cdot\|_1$ eine **Halbnorm** auf dem Vektorraum $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{[a,b]}$ aller Riemannsch integrierbaren Funktion auf $[a,b]$ ist, d.h. es gilt

$$\|f\|_1 \geq 0, \quad \|\lambda f\|_1 = |\lambda|\ \|f\|_1, \quad \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

für alle $f, g \in \mathcal{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\|\cdot\|_1$ ist allerdings keine Norm, denn ist z.B. $f(x) = 1$ für $x = a$ und $f(x) = 0$ für $x \neq a$, dann ist $f \in \mathcal{R}$, $f \neq 0$, jedoch $\|f\|_1 = 0$).

Der Vektorraumaum $\mathcal{R}$, versehen mit dieser Halbnorm $\|\cdot\|_1$, ist jedoch nicht vollständig.

Beispiel. Für $k \geq 1$ sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^{-1/2}, & x > 1/k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f_k stückweise stetig ist, liegt f_k in $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{[0,1]}$. Ferner ist $\{f_k\}_k$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ eine Cauchy-Folge, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0 so, dass für $k, \ell \geq k_0$ stets $\|f_k - f_\ell\|_1 < \varepsilon$ ist. Gäbe es nun ein $f \in \mathcal{R}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$, so müsste gelten: $f(x) = x^{-1/2} + r(x)$, $x \in]0,1]$, wobei $r|_{[\delta,1]}$ für jedes $\delta > 0$ eine Riemannsch integrierbare Funktion ist mit $\int_\delta^1 |r(x)|dx = 0$. Nach Aufgabe 1.3 ist dann aber die Menge $\{x \in]0,1] : |r(x)| \leq 1\}$ dicht in $[0,1]$. Insbesondere gibt es also eine Nullfolge $\{x_j\}_j$ in $]0,1]$ mit $|r(x_j)| \leq 1$. Andererseits gilt $x_j^{-1/2} \to \infty$, und folglich müsste f unbeschränkt sein. Da Riemannsch integrierbare Funktionen beschränkt sind, führt dies zum Widerspruch.

Nachdem bereits eine Vielzahl verschiedener Verallgemeinerungen des Riemannschen Integralbegriffs aufgestellt worden waren, gelang es H. Lebesgue (1875—1941) um die vorletzte Jahrhundertwende einen Integralbegriff einzuführen, welcher all diese Probleme behebt und zu einer leistungsfähigen Integrationstheorie geführt hat.
Es sollte noch erwähnt werden, dass inzwischen eine Reihe recht unterschiedlicher Zugänge zum Lebesgueschen Integral entdeckt worden sind, welche jedoch allesamt äquivalent sind.
Bei dem von uns gewählten Zugang werden wir für beliebige Funktionen f auf dem $\mathbb{R}^n$ deren „L^1-Halbnorm $\|f\|_1$" definieren. Der Raum der integrierbaren Funktionen wird dann der Abschluss (also eine „konkrete" Vervollständigung) des Raumes aller Treppenfunktionen bzgl. dieser Halbnorm sein.

2 Integration von Treppenfunktionen

Definitionen.

(i) Seien X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge. Unter der **charakteristischen Funktion** (oder auch **Indikatorfunktion**) von A versteht man die Funktion $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \in X \setminus A \end{cases}$$

definiert ist (man schreibt oft auch χ_A anstelle von $\mathbb{1}_A$).

$\varepsilon > 0$ $\qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$$\int_0^1 |f_k(x) - f_l(x)|\,dx$$

$l > k$

$$= \int_{1/l}^{1/k} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$$

(f_k) Cauchyf in $L^1([0,1])$

$$= 2\left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} - \cancel{2\left(\frac{1}{l}\right)^{1/2}}$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} < \varepsilon \quad \exists\, k_0 \text{ mit } k > k_0.$$

Gäbe es ein $f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \| f - f_k \|_1 = 0$$

$$f(x) = x^{-1/2} + v(x)$$

$$f(x) - x^{-1/2} = v(x)$$

$$v|[\delta,1] : \int_\delta^1 |v(x)|\,dx = 0$$

$$\int_\delta^1 | f(x) - f_k(x) + f_k(x) - x^{-1/2} |\,dx$$

$$\int_\delta^1 |f(x) - f_k(x)|\,dx + \int_\delta^1 |f_k(x) - x^{-1/2}|\,dx$$

$$\underset{k\to\infty}{\downarrow 0} \qquad\qquad = 0$$

$\{x \in [0,1] : |r(x)| \leq 1\}$

dicht in $[0,1]$

$\Rightarrow \exists$ Nullfolge $\{x_j\}$ in $[0,1]$

$|r(x_j)| \leq 1$

$$f(x_j) = x_j^{-1/2} + \underbrace{r(x_j)}_{|\quad| \leq 1}$$

(ii) Ein **Quader** Q im $\mathbb{R}^n$ ist das direkte Produkt $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ von n beschränkten, nichtleeren Intervallen $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Ist I ein Intervall mit den Endpunkten $a \le b$, so bezeichne $v_1(I) := |I| = b - a$ seine **Länge**. Allgemeiner ist das (n-dimensionale) **Volumen** des Quaders $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ definiert durch

$$v_n(Q) := |I_1| \cdots |I_n|,$$

d.h. $v_n(Q)$ ist das Produkt der Kantenlängen des Quaders. Oftmals werden wir in Situationen, in denen klar ist, dass wir das n-dimensionale Volumen meinen, auch nur kurz $v(Q)$ anstelle von $v_n(Q)$ schreiben. Ist Q **ausgeartet**, d.h. liegt Q in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, so ist $v_n(Q) = 0$.

(iii) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heiße **Treppenfunktion**, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_s$ gibt so, dass

(a) φ auf jedem dieser Quader konstant ist, und

(a) $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s} Q_j$,

d.h. wenn φ die Gestalt

$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j} \tag{2.1}$$

hat, mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ und paarweise disjunkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_s$.

Lemma 2.1. *Eine Funktion φ der Gestalt (2.1) ist auch dann eine Treppenfunktion, wenn die Quader $Q_1, \ldots, Q_s$ nicht paarweise disjunkt sind.*

Beweis. Übung.

Beispiel 2.2 (**Treppenfunktionen und Riemannsche Summen**). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und sei $Z = \{x_0, \ldots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, d.h. es gelte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$. Sei $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ das j-te Teilintervall dieser Zerlegung, und sei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in I_1, \times \cdots \times I_m$ ein m-Tupel von Stützstellen zur Zerlegung Z. Die zugehörige Treppenfunktion*

$$\varphi_{Z,\xi} := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, \mathbb{1}_{I_j}$$

besitzt dann gerade das Integral

$$\int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, |I_j| = S(f, Z, \xi),$$

wobei $S(f, Z, \xi)$ die Riemannsche Summe von f bzgl. Z und ξ bezeichne.

Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathcal{T}$ gerade die lineare Hülle der Menge aller charakteristischen Funktionen von Quadern, also insbesondere ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es gilt sogar

Lemma 2.3. *$\mathcal{T}$ ist eine Algebra über $\mathbb{C}$; insbesondere sind Summen und Produkte von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktion.*

Beweis. Da die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Algebra bildet, welche $\mathcal{T}$ enthält, muss nur noch gezeigt werden, dass mit $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ auch die Produktfunktion $\varphi\psi$ in $\mathcal{T}$ liegt. Sind jedoch φ und ψ von der Gestalt (2.1), d.h. ist

$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}, \quad \psi = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \mathbb{1}_{P_k},$$

mit Quadern Q_j und P_k und $\lambda_j, \mu_k \in \mathbb{C}$, so ist

$$\varphi\psi = \sum_{j,k} (\lambda_j \mu_k) \mathbb{1}_{Q_j} \mathbb{1}_{P_k}.$$

Da $\mathbb{1}_{Q_j} \mathbb{1}_{P_k} = \mathbb{1}_{Q_j \cap P_k}$ ist, und da mit Q_j und P_k auch $Q_j \cap P_k$ ein Quader ist (oder leer), folgt die Behauptung. Q.E.D.

Definition. Unter dem **Integral der Treppenfunktion** $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}$ versteht man die Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int \varphi\ dx := \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v(Q_j) \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Ist z.B. $\varphi_{Z,\xi}$ die einer Riemannsumme in Beispiel 2.2 zugeordnete Treppenfunktion, so ist offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = \int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = S(f, Z, \xi).$$

Satz 2.4. *Die Definition des Integrals einer Treppenfunktion φ hängt nicht von ihrer expliziten Darstellung (2.1) ab. Ferner gelten die folgenden Rechenregeln: Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist*

(i) $\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\ dx = \alpha \int \varphi\ dx + \beta \int \psi\ dx$ *(Linearität)*

(ii) $|\int \varphi\ dx| \leq \int |\varphi|\ dx$ *(„Dreiecksungleichung")*

(iii) $\int \varphi\ dx \leq \int \psi\ dx$, *falls φ und ψ reellwertig sind und $\varphi \leq \psi$.* *(Monotonie)*

Beweis. Per Induktion nach der Dimension n: Ist $n = 1$, so folgen die Behauptungen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Riemannschen Integrals, da jede Treppenfunktion Riemannsch integrierbar ist über jedes kompakte Intervall $[a, b]$, welches alle Intervall Q_j enthält, wobei offenbar das durch (2.2) definierte Integral mit dem Riemannschen Integral über $[a, b]$ übereinstimmt.

Wir nehmen nun an, dass die Aussagen für alle Dimensionen $m < n$ gelten.
Sei $1 \leq p < n$, und zerlege $\mathbb{R}^n = X \times Y$, mit $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^{n-p}$. Entsprechend schreiben wir jeden Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ als direktes Produkt

$$Q = Q' \times Q''$$

der Quader $Q' := I_1 \times \ldots \times I_p \subset X$ und $Q'' := I_{p+1} \times \ldots \times I_n \subset Y$. Für $z = (x, y) \in X \times Y$ ist dann

$$\mathbb{1}_Q(z) = \mathbb{1}_{Q'}(x)\mathbb{1}_{Q''}(y).$$

Sei nun $\varphi = \sum_j \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}$ eine Treppenfunktion auf $X \times Y$. Für jedes $y \in Y$ ist dann $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ eine Treppenfunktion auf X, da

$$\varphi_y = \sum_j \lambda_j \mathbb{1}_{Q''_j}(y)\mathbb{1}_{Q'_j}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist das Integral von φ_y über X unabhängig von der Darstellung (2.1) von φ wohldefiniert und gegeben durch

$$\int_X \varphi_y(x)\ dx = \sum_j \lambda_j v_p(Q'_j)\mathbb{1}_{Q''_j}(y) =: \Phi(y).$$

Φ ist offenbar eine Treppenfunktion auf Y.
Wiederum nach Induktionsannahme ist das Integral von Φ wohldefiniert und gegeben durch

$$\int_Y \Phi(y)dy = \sum_j \lambda_j v_p(Q'_j)v_{n-p}(Q''_j).$$

Somit folgt insgesamt

$$\int_Y \left(\int_X \varphi_y(x)\ dx \right) dy = \sum_k \lambda_k v_n(Q_k). \tag{2.3}$$

Die linke Seite von (2.3) hängt nicht von der Darstellung (2.1) von φ ab. Damit ist die Definition des Integrals von φ durch die rechte Seite von (2.3) gerechtfertigt. Ferner gilt nach (2.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)\ dx \right) dy. \tag{2.4}$$

Mittels (2.4) folgen nun auch die Aussagen (i) – (iii) unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für Räume der Dimension $m < n$. Q.E.D.

Schreiben wir anstelle von $\int_X \varphi_y(x)\ dx$ einfacher $\int_X \varphi(x,y)\ dx$, so haben wir mit (2.4) gleichzeitig folgendes Ergebnis bewiesen:

Korollar 2.5 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen). *Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Beweises gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{T}$*

$$\int_{X\times Y} \varphi(x,y)d(x,y) = \int_Y \left(\int_X \varphi(x,y)\ dx\right) dy. \tag{2.5}$$

3 Die L^1-Halbnorm

Vorbemerkung. In der Integrationstheorie werden des öfteren divergente Reihen der Gestalt $\sum\limits_j a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}_0^+$ auftreten. Wir schreiben dann kurz $\sum\limits_j a_j = \infty$. Dies legt nahe, Funktionen und Reihen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ zu betrachten. *Speziell für die Integrationstheorie werden wir folgende Regeln für das Rechnen mit ∞ benutzen:*

$$\begin{aligned}
&|\infty| := \infty\ ; \qquad \overline{\infty} := \infty,\\
&r < \infty \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \infty \le \infty,\\
&\infty + c = c + \infty := \infty \quad \forall c \in \mathbb{C}\cup\{\infty\},\\
&\infty \cdot c = c \cdot \infty := \infty \quad \forall c \in \mathbb{C}^\times \cup\{\infty\},\\
&\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty := 0.
\end{aligned}$$

Terme $c-\infty$ sind als $c+(-1)\infty = c+\infty = \infty$ zu deuten. Schließlich ordnen wir einer Folge $\{a_j\}_j$ in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ den „Grenzwert" $\lim a_j := \infty$ zu, falls alle Folgenglieder ab einem gewissen Index gleich ∞ sind, oder falls $|a_j|$ gegen ∞ strebt. Insbesondere ist $\sum_j a_j = \infty$, falls $a_j \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und ein j_0 existiert mit $a_{j_0} = \infty$.
Dementsprechend werden wir oft Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ zulassen. Im Gegensatz zu **reellen** Funktionen bzw. **komplexen** Funktionen, welche Werte in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ annehmen, werden wir Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ als **numerische Funktionen** bezeichnen.
Zur Abkürzung werden wir die Menge $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ oft mit $[0,\infty]$ bezeichnen.

Definitionen.

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ eine numerische Funktion. Unter einer **Hüllreihe** zu f verstehen wir eine Funktionenreihe

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{Q_k}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen Q_k sind *offene* Quader im $\mathbb{R}^n$, und $a_k \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{Q_k}(x).$$

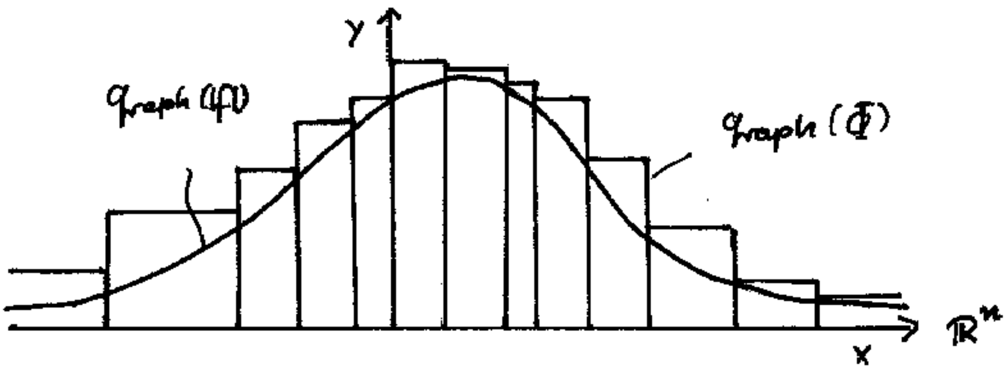
(ii) Der **Inhalt** der Hüllreihe Φ ist definiert durch

$$I(\Phi) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k v(Q_k) \in [0, \infty].$$

(iii) Unter der **L^1-Halbnorm** $\|f\|_1$ einer numerischen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ verstehen wir das Infimum der Inhalte aller Hüllreihen zu f, d.h.

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \text{ ist Hüllreihe zu } f\}.$$

Da jede numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Hüllreihe $\Phi_\infty := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{]-k,k[^n}$ besitzt, ist $\|f\|_1$ stets eine nicht-negative Zahl oder ∞, d.h. $\|f\|_1 \in [0, \infty]$.



Interpretation. $\|f\|_1$ ist ein „äußeres" Maß für das $(n+1)$-dimensionale Volumen des Gebietes

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ 0 \leq y \leq |f(x)|\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

welches durch die Ebene $\{y = 0\}$ und den Graphen $\mathcal{G}(|f|) = \{(x, |f(x)|) : x \in \mathbb{R}^n\}$ von $|f|$ begrenzt wird.

Es ist übrigens für den zu entwickelnden Integrationsbegriff entscheidend, Hüllreihen mit unendlich vielen Termen zuzulassen – andernfalls würden wir nicht auf den Lebesgueschen, sondern den Riemannschen Integralbegriff geführt.

Lemma 3.1. *Für* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *und* $c \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\|cf\|_1 = |c|\ \|f\|_1$*;*

(ii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$*;*

(iii) $|f| \leq |g| \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Beweis. Die Regeln (i) und (iii) sind unmittelbar einzusehen. Die Regel (ii) ist wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ und (iii) ein Spezialfall der folgenden Ungleichung:

Lemma 3.2 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung). *Für jede Folge nicht-negativer numerische Funktionen* $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *gilt:*

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis. Es genügt, den Fall $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty$ zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle dann zu jeder Funktion f_k eine Hüllreihe $\Phi_k = \sum\limits_j a_{kj}\, \mathbb{1}_{Q_{kj}}$ mit Inhalt

$$I(\Phi_k) = \sum_j a_{kj} v(Q_{kj}) \leq \|f_k\|_1 + \varepsilon 2^{-k-1}.$$

Die Doppelreihe $\Phi := \sum\limits_{k,j} a_{kj} \mathbb{1}_{Q_{kj}}$ (genauer: die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{\nu(i)} \mathbb{1}_{Q_{\nu(i)}}$, wobei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine (beliebige) Bijektion sei) ist dann eine Hüllreihe zu $f := \sum\limits_k f_k$. Ihr Inhalt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= \sum_{k,j} a_{kj}\, v(Q_{kj}) = \sum_k \left(\sum_j a_{kj}\, v(Q_{kj}) \right) \\ &= \sum_k I(\Phi_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\|f_k\|_1 + \varepsilon 2^{-k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

(zur Erinnerung: Reihen mit nicht-negativen Termen dürfen beliebig umgeordnet werden!).
Somit ist $\|\sum\limits_k f_k\|_1 \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt.

Q.E.D.

Beispiel 3.3. Sei $H = \{x_j = a\}$ eine achsenparallele Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, z.B. $H = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = a\}$. Dann ist $\|\mathbb{1}_H\|_1 = 0$. Insbesondere ist $\|\mathbb{1}_Q\|_1 = 0$ für jeden ausgearteten Quader Q.

Setzen wir nämlich $Q_k :=]a - \varepsilon 2^{-k}, a + \varepsilon 2^{-k}[\times] - k, k[^{n-1}$ für $k \geq 1$ (mit $\varepsilon > 0$), so ist $H \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, folglich $\Phi_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$ eine Hüllreihe zu $\mathbb{1}_H$, mit Inhalt

$$I(\Phi_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{1-k} (2k)^{n-1} = \varepsilon A,$$

mit einer endlichen Konstanten A. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\|\mathbb{1}_H\|_1 = 0$.

Wir wollen nun die wichtige Tatsache beweisen, dass die L^1-Halbnorm einer nichtnegativen Treppenfunktion gleich ihrem Integral ist.

Lemma 3.4 (Fundamentallemma). *Für die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ eines kompakten Quaders A gilt*

$$\|\mathbb{1}_A\|_1 = v(A) = \int \mathbb{1}_A \, dx.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und wähle dazu einen offenen Quader Q mit $A \subset Q$ und $v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$. Dann ist $\Phi := \mathbb{1}_Q$ eine Hüllreihe zu $\mathbb{1}_A$ mit Inhalt $I(\Phi) = v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$. Es folgt

$$\|\mathbb{1}_A\|_1 \leq v(A).$$

Ist umgekehrt $\Phi = \sum\limits_k a_k \mathbb{1}_{Q_k}$ eine beliebige Hüllreihe zu $\mathbb{1}_A$, so ist $1 \leq \Phi(x)$ für jedes $x \in A$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es daher zu jedem $x \in A$ einen Index $N = N(x)$ mit

$$1 - \varepsilon < \sum_{k=0}^{N(x)} a_k \mathbb{1}_{Q_k}(x).$$

Wegen der Offenheit der Q_k bleibt diese Ungleichung für alle Punkte einer offenen Umgebung $U(x)$ von x gültig. Da A kompakt ist, können wir A mit endlich vielen solchen Umgebungen $U(x_1), \ldots, U(x_p)$ überdecken. Für $M := \max\{N(x_1), \ldots, N(x_p)\}$ folgt:

$$(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_A \leq \sum_{k=0}^{M} a_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Da beide Seiten dieser Ungleichung Treppenfunktionen sind, erhalten wir durch Integration mit Hilfe von Lemma 3.1 (iii)

$$(1 - \varepsilon) v(A) \leq \sum_{k=0}^{M} a_k v(Q_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k v(Q_k) = I(\Phi),$$

und zwar für jedes $\varepsilon > 0$, also $v(A) \leq I(\Phi)$. Da dies für jede Hüllreihe Φ zu $\mathbb{1}_A$ gilt, folgt

$$v(A) \leq \|\mathbb{1}_A\|_1.$$

Q.E.D.

Lemma 3.5. *Für jede Treppenfunktion f auf $\mathbb{R}^n$ gilt $\|f\|_1 = \int |f|\, dx$.*

Beweis. Ist $Q = \langle a_1, b_1\rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n\rangle$ ein beliebiger Quader (hier bezeichne $\langle a, b\rangle$ ein beliebiges Intervall mit den Endpunkten $a \leq b$), so ist der Abschluss $\overline{Q}$ von Q der kompakte Quader

$$\overline{Q} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Ferner ist offenbar $v(Q) = v(\overline{Q})$.
Sei nun f eine beliebige Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Wegen $\|f\|_1 = \|\,|f|\,\|_1$ dürfen wir o.B.d.A. $f \geq 0$ annnehmen. Sei

$$f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{Q_k} \tag{3.1}$$

eine Darstellung von f mit paarweise disjunkten Quadern Q_k und Koeffizienten $a_k > 0$. Nach den Lemmata 3.1, 3.2 folgt

$$\|f\|_1 \leq \sum_k \|a_k \mathbb{1}_{Q_k}\|_1 = \sum_k a_k \|\mathbb{1}_{Q_k}\|_1.$$

Ferner ist $\mathbb{1}_{Q_k} \leq \mathbb{1}_{\overline{Q}_k}$, also $\|\mathbb{1}_{Q_k}\|_1 \leq \|1_{\overline{Q}_k}\|_1$, und nach dem Fundamentallemma 3.4 ist $\|\mathbb{1}_{\overline{Q}_k}\|_1 = v(\overline{Q}_k) = v(Q_k)$. Damit ergibt sich insgesamt

$$\|f\|_1 \leq \sum_k a_k v(Q_k) = \int f\ dx. \tag{3.2}$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, wählen wir einen genügend großen kompakten Quader A so, dass $Q_k \subset A$ ist für alle Quader Q_k in (3.1), und setzen $m := \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Dann ist $f(x) = 0$ für $x \notin A$, und $f(x) \leq m\ \forall x \in A$. Somit ist

$$g := m\mathbb{1}_A - f$$

eine nicht-negative Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$, für welche nach (3.2) gilt:

$$\|g\|_1 \leq \int g\ dx = mv(A) - \int f\ dx.$$

Ferner ist nach dem Fundamentallemma $\|g + f\|_1 = \|m\mathbb{1}_A\|_1 = mv(A)$, so dass gilt

$$\begin{aligned} \int f\ dx &\leq mv(A) - \|g\|_1 = \|f + g\|_1 - \|g\|_1 \\ &\leq \|f\|_1 + \|g\|_1 - \|g\|_1 = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.2) ergibt sich die Behauptung. Q.E.D.

4 Das Lebesguesche Integral und seine elementaren Eigenschaften

4.1 Integration über den $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heiße **Lebesgue-integrierbar über den $\mathbb{R}^n$** (kurz: **integrierbar**), wenn es eine Folge $\{\varphi_k\}_k$ von Treppenfunktionen gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0, \tag{4.1}$$

oder, äquivalent dazu, wenn sich f beliebig genau in der L^1-Halbnorm durch Treppenfunktionen approximieren lässt, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ_ε gibt mit $\|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Offenbar ist dann $\|f\|_1 < \infty$.

4.1 (Lemma und Definition). *Für jede Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\mathcal{T}$ mit (4.1) ist die Folge der Integrale $\{\int \varphi_k \, dx\}_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, also konvergent. Ferner hängt der Grenzwert nicht von der Approximationsfolge $\{\varphi_k\}_k$ ab, sondern nur von f. Wir bezeichnen diesen als das* **(Lebesgue)-Integral von** *f, und schreiben dafür $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ oder kurz $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx$, $\int f d^n x$ bzw. $\int f \; dx$, d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Beweis. Für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ gilt nach Lemma 3.5 und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left|\int \varphi\, dx - \int \psi\, dx\right| &= \left|\int (\varphi - \psi)\, dx\right| \le \int |\varphi - \psi|\, dx = \|\varphi - \psi\|_1 \\ &\le \|f - \varphi\|_1 + \|f - \psi\|_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgen leicht die Behauptungen.

Q.E.D.

Bemerkungen 4.2. (i) Offenbar ist jede Treppenfunktion φ integrierbar, und ihr Lebesgue-Integral stimmt mit dem in Paragraph 6 definierten Integral überein.

(ii) Während aus $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_\infty = 0$ die punktweise Konvergenz von $\{\varphi_k\}_k$ gegen f folgt, kann dies aus $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ i.a. nicht gefolgert werden. Wir werden später sehen, dass man jedoch stets eine Teilfolge $\{\varphi_{k_j}\}_j$ auswählen kann, welche „fast überall“ punktweise gegen f konvergiert.

Satz 4.3. *Mit f ist auch $|f|$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und es gilt*

$$\left|\int f \; dx\right| \le \int |f|\, dx = \|f\|_1. \tag{4.3}$$

Bemerkung. Bei anderen Zugängen zum Lebesgueschen Integral wird die L^1-Halbnorm von f oft durch die Identität auf der rechten Seite von (4.3) definiert.

Beweis. Sei $\{\varphi_k\}_k$ eine Folge in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$. Aus $|\,|f| - |\varphi_k|\,| \leq |f - \varphi_k|$ folgt mittels der Monotonie der L^1-Halbnorm

$$\|\,|f| - |\varphi_k|\,\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1.$$

Insbesondere ist $\lim_{k\to\infty} \|\,|f| - |\varphi_k|\,\|_1 = 0$, d.h. $|f|$ ist integrierbar, und es folgt

$$\begin{aligned} \left|\int f\ dx\right| &= \left|\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\, dx\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\int \varphi_k\, dx\right| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k|\, dx = \int |f|\, dx. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\int |f|\, dx = \|f\|_1$.
Nun gilt aber

$$\|f\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1,$$

wobei $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k|\, dx = \int |f|\, dx$ ist. Für $k \to \infty$ erhalten wir damit

$$\|f\|_1 \leq \int |f|\, dx \leq \|f\|_1$$

Q.E.D.

Satz 4.4. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) Die Funktionen $\alpha f + \beta g$ und $\overline{f}$ sind integrierbar, und

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx, \qquad \text{(Linearität)}$$

$$\int \overline{f}\ dx = \overline{\int f\ dx}.$$

(ii) Für reelles f und g folgt aus $f \leq g$

$$\int f\ dx \leq \int g\ dx \qquad \text{(Monotonie)}$$

(iii) Ist g zusätzlich beschränkt, so ist auch fg integrierbar, und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \tag{4.4}$$

Beweis.

(i) Sind $\{\varphi_k\}_k, \{\psi_k\}_k$ Folgen in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0 = \lim_{k\to\infty} \|g - \psi_k\|_1$, so sind $\{\alpha\varphi_k + \beta\psi_k\}_k$ und $\{\overline{\varphi}_k\}_k$ Folgen in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|(\alpha f + \beta g) - (\alpha\varphi_k + \beta\psi_k)\|_1 = 0$ bzw. $\lim_{k\to\infty} \|\overline{f} - \overline{\varphi_k}\|_1 = 0$. Die Behauptung folgt nun leicht aus Satz 2.4.

(ii) Nach Satz 4.3 und (i) gilt

$$\int g\,dx - \int f\,dx = \int (g-f)\,dx = \|g-f\|_1 \geq 0.$$

(iii) Sei o.B.d.A. $M := \|g\|_\infty > 0$. Sei $\varepsilon > 0$, und wähle $\varphi \in \mathcal{T}$ mit $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon/2M$. Sei $N := \|\varphi\|_\infty + 1$, und wähle nun $\psi \in \mathcal{T}$ mit $\|g-\psi\|_1 < \varepsilon/2N$.

Aus

$$\begin{aligned} |fg - \varphi\psi| &\leq |f-\varphi|\ |g| + |\varphi|\ |g-\psi| \\ &\leq M|f-\varphi| + N|g-\psi| \end{aligned}$$

folgt dann

$$\|fg - \varphi\psi\|_1 \leq M\|f-\varphi\|_1 + N\|g-\psi\|_1 < \varepsilon.$$

Somit ist fg integrierbar, und aus $|fg| \leq M|f|$ folgt mit (i) und (ii)

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\,dx \leq M \int |f|\,dx = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Q.E.D.

Korollar 4.5. *(i) Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn die reellen Funktionen $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ dies sind, und es gilt dann*

$$\int f\ dx = \int \mathrm{Re}\,(f)\,dx + i\int \mathrm{Im}\,(f)\,dx.$$

(ii) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reelle integrierbare Funktionen, dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad \textit{und} \\ \min(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{aligned}$$

integrierbar. Insbesondere sind der **positive Anteil** $f^+ := \max(f,0)$ *und der* **negative Anteil** $f^- := \max(-f,0)$ *von f integrierbar.*

Bemerkung 4.6. Offenbar zerlegt sich f als Differenz der beiden nicht-negativen Funktionen f^+ und f^-, d.h.

$$f = f^+ - f^-. \tag{4.5}$$

Mittels des Korollars kann man sich bei vielen Beweisen auf den Fall nicht-negativer reeller Funktionen beschränken.

4.2 Integration über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Definitionen.

(i) Sei $f : B \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine numerische Funktion auf einer Teilmenge B des $\mathbb{R}^n$. Ist A eine Teilmenge von B, so verstehen wir unter der **trivialen Fortsetzung** f_A von f folgende Funktion $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

(ii) f heiße **über** $A \subset \mathbb{R}^n$ **integrierbar**, falls die triviale Fortsetzung f_A über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx$$

das (**Lebesgue)-Integral von** f **über** A. Wir setzen

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1.$$

Die im Abschnitt 4.1 bewiesenen Resultate gelten dann offenbar sinngemäß auch bei der Integration über eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt für jede über A integrierbare numerische Funktion

$$\|f\|_{1,A} = \int_A |f(x)|\,dx. \tag{4.6}$$

VORSICHT: Ist f über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist i.a. f keineswegs über jede Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ integrierbar! Allerdings gibt es eine sehr große Klasse von Mengen, die sogenannten „Lebesgue-messbaren“ Mengen, über welche jede auf dem $\mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion integrierbar ist. Darauf kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Satz 4.7. *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede Riemannsch integrierbare Funktion $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar, und ihr Riemannsches Integral stimmt mit dem Lebesgueschen überein, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Riemannsch integrierbar, mit Riemannschem Integral $S := \int_a^b f(x)\,dx$. Indem wir die Funktion f in ihren Real- und Imaginärteil zerlegen, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass f reell ist. Sei dann $\varepsilon > 0$, und wähle $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ in Intervalle $I_j, j = 1 \dots m$, der Feinheit $|Z| < \delta$ und jeden Vektor ξ von zugehörigen Stützstellen gilt

$$|S(f, Z, \xi) - S| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Seien Z eine solche Zerlegung und ξ ein solcher Vektor von Stützstellen, und sei

$$\varphi_{Z,\xi} := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, \mathbb{1}_{I_j}$$

die in Beispiel 2.2 zugeordnete Treppenfunktion. Seien ferner $A_j := \sup I_j$, $a_j := \inf I_j$, und seien

$$\varphi_u := \sum_{j=1}^{m} \overset{a_j}{\cancel{A_j}}\, \mathbb{1}_{I_j} \le \varphi_{Z,\xi} \le \varphi_o := \sum_{j=1}^{m} \overset{A_j}{\cancel{a_j}}\, \mathbb{1}_{I_j}$$

die zugehörige Riemannsche „Oberfunktion“ φ_o bzw. „Unterfunktion“ φ_u, welche Treppenfunktionen sind. Offenbar gilt dann auch

$$\varphi_u \le f \le \varphi_o,$$

so dass

$$|f - \varphi_{Z,\xi}| \le \varphi_o - \varphi_u,$$

und folglich

$$\|f - \varphi_{Z,\xi}\|_1 \le \int (\varphi_o - \varphi_u)\, dx = (\sum_{j=1}^{m} A_j |I_j| - S) - (\sum_{j=1}^{m} a_j |I_j| - S).$$

Die beiden Summen $\sum_{j=1}^{m} A_j |I_j|$ und $\sum_{j=1}^{m} a_j |I_j|$ lassen sich aber beliebig gut durch Riemannsche Summen zur Zerlegung Z approximieren, so dass man mit Hilfe von (4.7) leicht sieht, dass

$$\|f - \varphi_{Z,\xi}\|_1 < 4\varepsilon.$$

Dies zeigt, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Ferner zeigt Beispiel 2.2 in Verbindung mit (4.7), dass

$$|\int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx - S| < \varepsilon,$$

Folglich stimmt S mit dem Lebegueschen Integral von f über $[a, b]$ überein.

Q.E.D.

5 Zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale

In der Analysis I wurde gezeigt, dass sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beliebig genau gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lässt. Diese Aussage lässt sich mit fast wortgleichem Beweis auf stetige Funktionen auf beliebigen kompakten Quadern im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Damit erhält man ganz ähnlich wie in Satz 4.7, dass stetige Funktionen über kompakte Quader des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar sind. Allgemeiner gilt der folgende

Satz 5.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f über K integrierbar.*

Beweis. Später. Für einen direkten Beweis, siehe [K].

5.1 Der Kleine Satz von Fubini

Wie lässt sich nun „konkret“ das Integral einer Funktion $f \in C(K, \mathbb{C})$ wie in Satz 5.1 berechnen? Die wichtigste Methode besteht darin, mittels einer Verallgemeinerung von Korollar 2.5 mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführen.

Wir zerlegen dazu wieder $\mathbb{R}^n = X \times Y$, mit $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$, $p+q = n$.

Definitionen. Seien $A \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$.

(i) Wir setzen

$$\begin{aligned} A_y &:= \{x \in X : (x, y) \in A\} \subset X, \\ {}_xA &:= \{y \in Y : (x, y) \in A\} \subset Y. \end{aligned}$$

A_y bzw. ${}_xA$ heißt die **Schnittmenge von** A **zu** $y \in Y$ bzw. **zu** $x \in X$.

(ii) Ist $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine numerische Funktion, so definieren wir

$$\begin{aligned} f_y &: A_y \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ f_y(x) := f(x, y), \\ {}_xf &: {}_xA \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ {}_xf(y) := f(x, y). \end{aligned}$$

Ist f_y über A_y (bzw. ${}_xf$ über ${}_xA$) integrierbar, so setzen wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_y} f(x, y)\, dx &:= \int_{A_y} f_y(x)\, d^p x, \\ \int\limits_{{}_xA} f(x, y)\, dy &:= \int\limits_{{}_xA} {}_xf(y)\, d^q y. \end{aligned}$$

Schließlich bezeichne $\pi_1 : X \times Y \to X,\ (x,y) \mapsto x$ und $\pi_2 : X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y$ die Projektionen auf die erste bzw. 2. Koordinate des Produktraumes $X \times Y$. Da π_1 und π_2 stetig sind, sind offenbar $\pi_1(A)$ und $\pi_2(A)$ kompakt, falls $A \subset X \times Y$ kompakt ist. Ferner ist z.B.

$$\pi_2(A) = \{y \in Y : A_y \neq \emptyset\}. \tag{5.1}$$

Satz 5.2 (Kleiner Satz von Fubini). *Sei $A \subset X \times Y$ kompakt, und sei $f : A \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere $F : \pi_2(A) \to \mathbb{C}$ durch*

$$F(y) := \int\limits_{A_y} f(x,y)\,dx.$$

Dann ist F integrierbar über $\pi_2(A)$, und es gilt

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_2(A)} F(y)\,d^q y,$$

d.h.

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_2(A)} \Big(\int\limits_{A_y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy. \tag{5.2}$$

Analog ist auch

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_1(A)} \Big(\int\limits_{{}_xA} f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \tag{5.3}$$

Beweis. Später. Für den direkten Beweis, siehe [K].

Wichtiger Spezialfall.

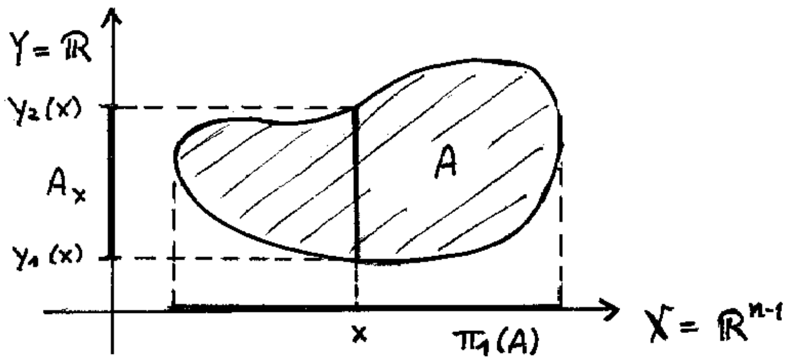
$$A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = X \times Y$$

sei kompakt, und für jedes $x \in \pi_1(A)$ sei ${}_xA$ ein (kompaktes) Intervall

$${}_xA = [y_1(x), y_2(x)]. \tag{5.4}$$

Dann gilt nach den obigen Sätzen und Satz 4.7 für $f \in C(A,\mathbb{C})$:

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_1(A)} \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \tag{5.5}$$



Damit ist ein n-dimensionales Integral auf ein 1-dimensionales und ein $(n-1)$-dimensionales Integral zurückgeführt. Durch Iteration kann man damit sukzessiv das n-dimensionale Integral auf n eindimensionale Integrationen zurückführen.

Beispiele 5.3. (a) Sei $A = [a,b] \times [c,d]$ ein **Quader** im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\pi_1(A) = [a,b]$, ${}_xA = [c,d]$ für $x \in \pi_1(A)$, also

$$\int\limits_A f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \Big)\, dx. \tag{5.6}$$

(b) Sei $A = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ eine **abgeschlossene Kreisscheibe**. Dann ist $\pi_1(A) = [-r,r]$, $y_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ für $x \in \pi_1(A)$, also

$$\int_{\overline{B_r(0)}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-r}^{r} \Big(\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\, dy \Big)\, dx. \tag{5.7}$$

Definition. Die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heiße (**Lebesgue)-integrierbar**, falls die Funktion 1 über A integrierbar ist, d.h. wenn $\mathbb{1}_A$ integrierbar ist.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Ist die Menge A integrierbar, so setzen wir

$$v(A) = v_n(A) := \int_A 1\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A\, dx.$$

$v_n(A)$ heißt das n-**dimensionale Volumen** oder das **Lebesgue-Maß** von A. Im Fall $n = 2$ nennt man $v_2(A)$ auch den **Flächeninhalt** von A.

Beispiel 5.4. Nach Satz 5.1 ist die konstante Funktion $\mathbf{1}$ über die kompakte Kreisscheibe $A = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ integrierbar, d.h. $\overline{B_r(0)}$ ist eine integrierbare Menge. Ferner ist nach Beispiel 5.3 (b) ihr Flächeninhalt gegeben durch

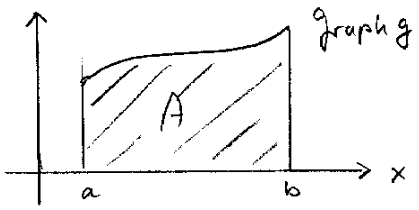
$$\begin{aligned} v_2(\overline{B_r(0)}) &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\, dy \right) dx = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\ &= 4r \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \pi r^2. \end{aligned}$$

Beispiel 5.5. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig. Dann hat

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ 0 \le y \le g(x)\}$$

nach Formel (5.5) den Flächeninhalt

$$v_2(A) = \int_{[a,b]} \left(\int_0^{g(x)} 1\, dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx.$$



5.2 Berechnung von Volumina. Cavalierisches Prinzip

Der Kleine Satz von Fubini liefert insbesondere ein nützliches Rekursionsverfahren zur Berechnung von Volumina. Sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = X \times Y$ eine kompakte Menge. Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichne wieder A_y die Schnittmenge $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in A\}$. Dann gilt offenbar

$$v_n(A) = \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}(A_y)\, dy. \tag{5.8}$$

Insbesondere gilt das folgende, nach B. Cavalieri (1598-1647) benannte Prinzip: *Zwei kompakte Mengen A und B in $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ haben das gleiche Volumen, wenn die Schnittmengen A_y und B_y für alle $y \in \mathbb{R}$ das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen haben.*

Beispiele 5.6. *Seien $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Kompaktum und $h > 0$.*

(a) Volumen eines Zylinders. Die Menge

$$Z = Z(B,h) := B \times [0,h] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

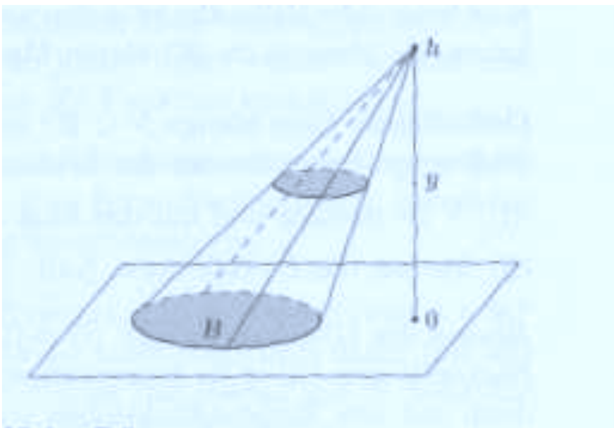
heißt **Zylinder** mit Basis B und Höhe h. Für jedes $h \in [0,h] = \pi_2(Z(B,h))$ ist $Z(B,h)_y = B$, und somit folgt nach (5.8)

$$v_n(Z) = \int_0^h v_{n-1}(B)\,dy = h \cdot v_{n-1}(B).$$

(b) Volumen eines Kegels. Die Menge

$$K = K(B,h) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : y \in [0,h] \text{ und } x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$$

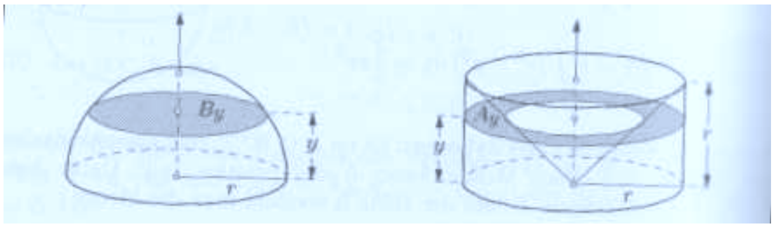
heißt **Kegel** mit Basis B und Höhe h.



Die Schnittmenge $K(B,h)_y$ ist für $h \in [0,h] = \pi_2(K(B,h))$ gegeben durch $K(B,h)_y = (1 - \frac{y}{h})B$. Sie hat nach Aufgabe 4.3 (b) das $(n-1)$-dimensionale Volumen $(1 - \frac{y}{h})^{n-1} \cdot v_{n-1}(B)$. Damit ergibt sich

$$v_n(K) = v_{n-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} dy = \frac{h}{n} \cdot v_{n-1}(B).$$

(c) Das Kugelvolumen nach Archimedes. Sei A der dreidimensionale Körper, der entsteht, wenn man aus dem Kreiszylinder Z mit Radius r und Höhe r einen



Kegel ausbohrt, der seine Spitze im Mittelpunkt der Basis von Z hat und dessen Basis die Deckscheibe von Z ist. Sei ferner B die Halbkugel mit dem Radius r.

Der Schnitt A_y in der Höhe y ist ein Kreisring mit der Fläche $\pi(r^2 - y^2)$, der Schnitt B_y ein Kreis mit derselben Fläche (vgl. Beispiel 5.4) . Also ist

$$v(B) = v(A) = v(Z) - v(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Die (3-dimensionale) Kugel vom Radius r hat also das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Unsere Argumentation enthält allerdings noch eine kleine Lücke. Damit A kompakt ist, muss ein offener Kegel K ausgebohrt werden. Gerechnet haben wir aber mit dem Volumen des abgeschlossenen Kegels $\overline{K}$. Nun ist aber $\overline{K} \setminus K = \partial K$ eine Nullmenge (dies folgt z.B. mit Hilfe von Aufgabe 3.2 c), und deshalb gilt, wie wir zeigen werden, dass $v(\overline{K}) = v(K)$. Außerdem müssen wir noch weitere Eigenschaften des Maßes nachweisen, wie z.B. die Additivität bei disjunkten Zerlegungen von Mengen (s. § 8).

6 Lebesguesche Nullfunktionen und Nullmengen

Definition. Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heiße (**Lebesguesche**) **Nullfunktion**, falls $\|f\|_1 = 0$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{N} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \ \|f\|_1 = 0\}$$

die Menge aller Nullfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.1. *(a) Für eine numerische Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist eine Nullfunktion.

(ii) f ist integrierbar und $\int |f| dx = 0$.

(b) Ist $\{f_k\}_k$ eine Folge von Nullfunktionen, so ist $\sum\limits_k |f_k|$ eine Nullfunktion.

(c) $\mathcal{N}$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(d) Ist $|g| \leq f$ und $f \in \mathcal{N}$, so ist $g \in \mathcal{N}$.

Beweis. (a) folgt Satz 4.3, (b) aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung für die L^1-Halbnorm, (c), (d) aus Lemma 3.1.

Q.E.D.

Definition. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heiße (**Lebesguesche**) **Nullmenge**, falls ihre Indikatorfunktion $\mathbb{1}_N$ eine Nullfunktion ist, d.h. wenn $\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$.

Der folgende Satz liefert eine anschaulichere Charakterisierung von Nullmengen:

Satz 6.2. *Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Beweis. Folgt aus dem allgemeineren Satz 9.2 (vgl. auch Aufgabe 3.3). Q.E.D.

Lemma 6.3. *(a) Ist $\{N_k\}_k$ eine Folge von Nullmengen in $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\bigcup\limits_k N_k$ eine Nullmenge.*

(b) Ist N eine Nullmenge, so auch jede Teilmenge $M \subset N$.

Beweis. (a) Folgt wegen $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_k N_k} \leq \sum\limits_k \mathbb{1}_{N_k}$ sofort aus Lemma 6.1 (b) und (d).
(b) Ist $M \subset N$, so ist $\mathbb{1}_M \leq \mathbb{1}_N$. Die Behauptung folgt damit aus Lemma 6.1 (d).

Q.E.D.

Z.B. ist damit nach Beispiel 3.3 jede Menge, welche in einer achsenparallelen Hyperebene liegt, eine Nullmenge. In späteren Kapiteln werden wir weitere Eigenschaften von Nullmengen studieren.

Definition. Es sei E eine Eigenschaft derart, dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt ist, ob er diese Eigenschaft hat oder nicht. Man sagt dann, dass **(Lebesgue) fast**

alle (kurz: **f.a.**) $x \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft E besitzen, oder dass die Eigenschaft E **fast überall** (kurz: **f.ü.**) gilt, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Wir werden sehen, dass Nullmengen in der Integrationstheorie in vielerlei Hinsicht die zulässigen Ausnahmemengen bilden. Z.B. gilt

Satz 6.4. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Funktion mit endlicher L^1-Halbnorm, d.h. $\|f\|_1 < \infty$ (dies gilt insbesondere, wenn f integrierbar ist). Dann ist $f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ endlich, d.h.*

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) = \infty\}$$

ist eine Nullmenge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $1 \leq \varepsilon \cdot \infty = \infty$, gilt:

$$\mathbb{1}_N \leq \varepsilon |f|, \text{ also } \|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt: $\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$.

Q.E.D.

Satz 6.5. *Die numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine Nullfunktion, wenn die Menge*

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

eine Nullmenge ist, d.h. wenn $f(x) = 0$ f.ü..

Beweis. Sei f eine Nullfunktion. Wir setzen dann $f_k := |f|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $u_N := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$. Dann ist

$$u_N(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. es ist $u_N = \infty \cdot \mathbb{1}_N$. Ferner ist

$$\|u_N\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 = 0,$$

d.h. u_N ist eine Nullfunktion. Nach Satz 10.3 ist damit N eine Nullmenge.

Nehmen wir umgekehrt an, dass N eine Nullmenge ist, und setzen dann $h_k := \mathbb{1}_N$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} h_k.$$

Wegen $\|h_k\|_1 = 0$ folgt damit $\|f\|_1 = 0$, d.h. f ist eine Nullfunktion.

Q.E.D.

Satz 6.6. *Es seien f und g numerische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, welche f.ü. gleich sind. Ist f integrierbar, so auch g, und es gilt dann*

$$\int f\,dx = \int g\,dx.$$

Insbesondere ist $f + h$ integrierbar für jede Nullfunktion $h \in \mathcal{N}$ und $\int (f+h)dx = \int f\,dx$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $h := g - f$ gleich Null außerhalb einer Nullmenge, so dass nach Satz 6.5 $\|h\|_1 = 0$ ist. Nach Lemma 6.1 ist h integrierbar, also auch $g = f + h$. Ferner ist

$$\int g\,dx = \int f\,dx + \int h\,dx,$$

und wegen $|\int h\,dx| \leq \int |h|dx = \|h\|_1 = 0$ ist $\int h\,dx = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

Q.E.D.

Fazit. Eine integrierbare Funktion darf auf einer Nullmenge beliebig abgeändert werden, ohne dass die Integrierbarkeit verlorengeht und das Integral sich ändert.

Korollar 6.7. *Sei f über die Teilmengen A und B des $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und sei $A \cap B$ eine Nullmenge. Dann ist f auch integrierbar über $A \cup B$, und es gilt:*

$$\int\limits_{A\cup B} f\,dx = \int_A f\,dx + \int\limits_B f\,dx. \tag{6.1}$$

Beweis. Wegen $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$ ist

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}.$$

Da $A \cap B$ Nullmenge ist, ist $f_{A\cap B}$ eine Nullfunktion. Mit f_A und f_B ist somit nach Lemma 6.1 und Satz 4.4 auch $f_{A\cup B}$ integrierbar, und es gilt

$$\int f_{A\cup B}dx = \int f_A dx + \int f_B dx.$$

Q.E.D.

Korollar 6.8. *Zu jeder integrierbaren numerischen Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine integrierbare komplexe Funktion $\tilde{f}$ so, dass $f = \tilde{f}$ f.ü..*

Beweis. Setze dazu

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \neq \infty, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und wende die vorangehenden Sätze an.

Q.E.D.

Definition. Sei f **fast überall auf** $\mathbb{R}^n$ **definiert**, d.h. auf $\mathbb{R}^n \setminus N$, wobei N eine Nullmenge ist. Man sagt dann, f sei **über den** $\mathbb{R}^n$ **integrierbar**, wenn irgendeine Fortsetzung von f auf den $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Nach Satz 6.6 ist entweder jede Fortsetzung von f auf den $\mathbb{R}^n$ integrierbar, oder keine, so dass dies Sinn macht. Im ersten Fall definiert man das **Integral von** f **über den** $\mathbb{R}^n$ durch das Integral irgendeiner Fortsetzung von f auf den $\mathbb{R}^n$.
Ganz analog kann man von der Integrierbarkeit einer Funktion f sprechen, welche nur f.ü. auf einer Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ definiert ist, und das Integral $\int_A f\,dx$ einer solchen Funktion definieren.

7 Konvergenzsätze

7.1 Der Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer

Definitionen.

(i) Es bezeichnen $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller integrierbaren numerischen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nach Satz 4.4 bildet $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\|\cdot\|_1$ ist nach Lemma 3.1 eine **Halbnorm** auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gilt

$$\|f\|_1 \geq 0, \qquad \|cf\|_1 = |c|\ \|f\|_1$$

und

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \qquad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), c \in \mathbb{C}.$$

Ferner ist $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{N}$.

(ii) Eine Folge numerischer Funktionen $\{f_k\}_k$ auf dem $\mathbb{R}^n$ heiße L^1-**konvergent gegen die numerische Funktion** f und f der L^1-**Grenzwert** von $\{f_k\}_k$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0.$$

(iii) Eine Folge numerischer Funktionen $\{f_k\}$ auf $\mathbb{R}^n$ heiße L^1-**Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so, dass

$$\|f_k - f_\ell\|_1 < \varepsilon \qquad \forall k, \ell \geq N.$$

Achtung. Da $\|\cdot\|_1$ auf $\mathcal{L}^1$ nur eine Halbnorm ist, unterscheidet sich der Grenzwertbegriff in (ii) insofern von dem in normierten Räumen, als der Grenzwert nicht mehr eindeutig ist.

Lemma 7.1. *Die Folge numerischer Funktionen $\{f_k\}_k$ besitze den L^1-Grenzwert f. Dann konvergiert sie auch gegen jede weitere numerische Funktion, welche f.ü. mit f übereinstimmt, und umgekehrt stimmt jeder L^1-Grenzwert von $\{f_k\}_k$ f.ü. mit f überein.*

Beweis. Ist $\tilde{f} = f$ f.ü., so ist $\tilde{f} = f + h$, mit $h \in \mathcal{N}$, d.h. h ist eine Nullfunktion. Wegen $\|\tilde{f} - f_k\|_1 = \|f - f_k + h\|_1 \leq \|f - f_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - f_k\|_1$ besitzt die Folge $\{f_k\}_k$ dann auch $\tilde{f}$ als L^1-Grenzwert.
Ist umgekehrt $\lim \|\tilde{f} - f_k\|_1 = 0$, so folgt aus

$$\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \|f - f_k\|_1 + \|\tilde{f} - f_k\|_1$$

im Grenzwert für $k \to \infty$, dass $\|f - \tilde{f}\|_1 = 0$. Q.E.D.

Ansonsten gelten die üblichen Regeln. Sind z.B. $\{f_k\}_k$ und $\{g_k\}_k$ L^1-konvergent gegen f bzw. g, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist $\{\alpha f_k + \beta g_k\}_k$ konvergent gegen $\alpha f + \beta g$. Ferner ist jede L^1-konvergente Funktionenfolge eine L^1-Cauchy-Folge.
Es ist nun eine fundamentale Tatsache, dass hiervon auch die Umkehrung gilt.

Theorem 7.2 (Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer).
Jede L^1-Cauchy-Folge $\{f_k\}_k$ integrierbarer numerischer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ besitzt einen L^1-Grenzwert $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$; für diesen gilt

$$\int f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx. \tag{7.1}$$

Beweis. Wir wählen Indizes $k_1 < k_2 < \ldots$ so, dass

$$\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 \leq 2^{-\nu} \qquad \forall k \geq k_\nu.$$

Die Teilfolge $\{f_{k_\nu}\}_\nu$ besitzt dann insbesondere folgende Eigenschaft:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}\|_1 \leq 1. \tag{7.2}$$

Setze

$$g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \text{ und } g := \sum_{\nu=1}^{\infty} |g_\nu|.$$

Mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung folgt: $\|g\|_1 \leq 1$. Sei $N_0 := \{x : g(x) = \infty\}$, und $N_\nu := \{x : f_{k_\nu}(x) = \infty\}$. Da $\|g\|_1 < \infty$, $\|f_{k_\nu}\|_1 < \infty$, sind nach Satz 6.4 die Mengen N_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, Nullmengen, also nach Lemma 6.3 auch $N := \bigcup_\nu N_\nu$. Für $x \in N^c$ ist $g_\nu(x) \in \mathbb{C}$ wohldefiniert, und die Reihe $\sum_\nu |g_\nu(x)|$ konvergiert absolut gegen $g(x)$.
Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty} f_{k_\nu}(x) = f_{k_1}(x) + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Dann ist f komplex, und die Teilfolge $\{f_{k_\nu}\}_\nu$ konvergiert f.ü. gegen f. Wir zeigen, dass f die gewünschten Eigenschaften hat.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\varrho \in \mathbb{N}$ so groß, dass die beiden Ungleichungen

$$\sum_{\nu=\varrho}^{\infty} \|g_\nu\|_1 \leq \varepsilon \text{ und } \|f_k - f_{k_\varrho}\|_1 \leq \varepsilon \qquad \forall k \geq k_\varrho$$

gelten. Sei φ eine Treppenfunktion mit

$$\|f_{k_\varrho} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_1 &\leq \|f - f_{k_\varrho}\|_1 + \|f_{k_\varrho} - \varphi\|_1 \\ &= \|\sum_{\nu=\varrho}^{\infty} g_\nu\|_1 + |f_{k_\varrho} - \varphi\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f integrierbar ist. Ferner gilt für $k \geq k_\varrho$

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_1 &\leq \|f - f_{k_\varrho}\|_1 + \|f_{k_\varrho} - f_k\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

so dass f ein L^1-Grenzwert der Folge $\{f_k\}_k$ ist.
Es bleibt (7.1) zu zeigen. Aber, nach Satz 4.3 ist

$$|\int f\,dx - \int f_k dx| \leq \int |f - f_k| dx = \|f - f_k\|_1,$$

woraus (7.1) folgt.

Q.E.D.

Bemerkung 7.3. Aus $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$ folgt i.a. nicht, dass die Folge $\{f_k\}_k$ f.ü. gegen f strebt (Übung). Der obige Beweis zeigt jedoch, dass es stets eine Teilfolge $\{f_{k_\nu}\}_\nu$ gibt, welche f.ü. punktweise gegen f strebt, nämlich wenn $\sum_\nu \|f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}\|_1 < \infty$.

Korollar 7.4. *Jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ ist ein L^1-Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen $\{\varphi_k\}_k$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$,

(ii) $\{\varphi_k\}_k$ *konvergiert f.ü. punktweise gegen* f.

Beweis. Sei $\{\psi_k\}_k$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - \psi_k\|_1 = 0$, und wende Bemerkung 7.3 auf die Folge $\{f_k\}_k = \{\psi_k\}_k$ an.

Q.E.D.

7.2 Der Banachraum $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wir haben gesehen, dass $\|\cdot\|_1$ keine Norm auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist, da $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1 : \|f\|_1 = 0\} \neq \{0\}$. $\mathcal{N}$ bildet jedoch einen linearen Teilraum von L^1. Wir definieren daher nun $L^1(\mathbb{R}^n)$ als den Faktorraum

$$L^1 = L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}.$$

Die Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ sind die Nebenklassen $[f] = f + \mathcal{N}$, mit $f \in \mathcal{L}^1$. Dies sind übrigens offenbar gerade die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^1$:

$$f \sim g, \quad \text{falls} \quad f = g \quad \text{f.ü..}$$

Durch Übergang von $\mathcal{L}^1$ zu L^1 „identifizieren" wir also zwei Funktionen f und g, wenn sie f.ü. gleich sind. Da $\|f\|_1 = \|g\|_1$, falls $f \sim g$, ist durch

$$\|f + \mathcal{N}\|_1 := \|f\|_1 \ , \ f \in \mathcal{L}^1,$$

daher eine Halbnorm auf L^1 wohldefiniert. Tatsächlich ist dies sogar eine Norm, denn ist $\|f + \mathcal{N}\|_1 = 0$, so ist $\|f\|_1 = 0$, also $f \in \mathcal{N}$ und somit $f + \mathcal{N} = \mathcal{N}$ das Nullelement in $\mathcal{L}^1/\mathcal{N}$.
Der Satz von Riesz-Fischer impliziert nun

Theorem 7.5. $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ *ist vollständig, d.h. ein Banachraum.*

Definition. Ist $[f] = f + \mathcal{N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so definieren wir das **Integral von** $[f]$ durch

$$\int [f]\, dx := \int f\, dx.$$

Nach Satz 6.6 ist dies wohldefiniert.

7.3 Der Satz von der monotonen Konvergenz

Theorem 7.6 (**B. Levi**). *Es sei $\{f_k\}_k$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ derart, dass die Folge der Integrale $\{\int f_k dx\}_k$ beschränkt ist. Dann ist die punktweise gebildete Grenzfunktion*

$$f := \lim_{k\to\infty} f_k = \sup_k f_k$$

integrierbar, und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k dx.$$

Beweis. Die Folge der Integrale ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Insbesondere ist sie eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es somit ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $N \leq \ell \leq k$

$$\int (f_k - f_\ell) dx = \left| \int f_k dx - \int f_\ell dx \right| < \varepsilon.$$

Für $k \geq \ell$ ist aber $\|f_k - f_\ell\|_1 = \int (f_k - f_\ell) dx$, so dass folglich $\{f_k\}_k$ eine L^1-Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1$ ist. Nach dem Satz von Riesz-Fischer besitzt sie einen L^1-Grenzwert $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$, und nach Bemerkung 7.3 gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_\nu}\}_\nu$, welche f.ü. punktweise gegen $\tilde{f}$ strebt. Somit ist $\tilde{f} = f$ f.ü. . Damit ist auch f integrierbar, und nach Riesz-Fischer ist

$$\int f\, dx = \int \tilde{f} dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k dx.$$

Q.E.D.

Wir betrachten zwei Anwendungen dieses Satzes.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Unter einer **Ausschöpfung** von A verstehen wir eine aufsteigende Folge

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$$

von Teilmengen $A_k \subset A$ mit $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir schreiben dann auch $A_k \uparrow A$.

Ist $\{A_k\}_k$ eine Ausschöpfung von A, so konvergiert offenbar die Folge der Indikatorfunktionen $\{\mathbb{1}_{A_k}\}_k$ monoton gegen $\mathbb{1}_A$.

Korollar 7.7 (**Integration durch Ausschöpfung**). *Sei f eine numerische Funktion auf $A \subset \mathbb{R}^n$, und sei $\{A_k\}_k$ eine Ausschöpfung von A derart, dass f über jedes A_k integrierbar ist. Dann ist f über A integrierbar genau dann, wenn die Folge der Integrale $\int_{A_k} |f| dx$ beschränkt ist. In diesem Fall ist*

$$\int_A f\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f\, dx.$$

Beweis. Nach Satz 4.3 ist mit f auch $|f|$ über A integrierbar, und es gilt

$$\int_{A_k} |f|dx = \int |f|_{A_k} dx \leq \int |f|_A dx = \int_A |f|dx,$$

d.h. die Folge $\{\int_{A_k} |f|dx\}_k$ ist beschränkt.
Sei nun umgekehrt die Folge der $\int_{A_k} |f|dx$ beschränkt. Nach eventueller Abänderung von f auf einer Nullmenge (vergl. Kapitel 6) dürfen wir f o.B.d.A. als komplex voraussetzen, und dann nach Korollar 4.5 sogar als reell und nicht-negativ.
Sei also o.B.d.A. $f \geq 0$. Dann ist f_A die punktweise Grenzfunktion der monoton wachsenden Folge $\{f_{A_k}\}_k$, deren Integrale beschränkt sind. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist daher f_A integrierbar, und

$$\int_A f\,dx = \int f_A dx = \lim_{k\to\infty} \int f_{A_k} dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f\,dx.$$

Q.E.D.

Korollar 7.8. *Seien $I \in \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f \in C(I, \mathbb{C})$. Dann ist f über I Lebesgue-integrierbar dann und nur dann, wenn das uneigentliche Riemannsche Integral von $|f|$ über I konvergiert. In diesem Fall stimmen das Lebesguesche Integral und das uneigentliche Riemannsche Integral von f über I überein.*

Beweis. Sei z.B. $I =]a, b[$, mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (der Fall eines kompakten Intervalls ist nach Satz 4.7 klar, und der Fall eines halboffenen Intervalls kann ähnlich wie der eines offenen behandelt werden).
Sei $\{[a_k, b_k]\}_k$ eine Ausschöpfung von $]a, b[$ durch kompakte Intervalle. Nach Satz 4.7 ist dann

$$I_k := \int_{[a_k,b_k]} |f(x)|dx = \int_{a_k}^{b_k} |f(x)|dx.$$

Nach Korollar 7.7 existiert daher $\int_{]a,b[} f\,dx$ genau dann, wenn die Folge $\{I_k\}_k$ beschränkt ist, d.h. wenn das uneigentliche Riemannsche Integral $\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^{b_k} |f(x)|dx$ existiert. Ferner gilt in diesem Fall

$$\int_{]a,b[} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a_k,b_k]} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^{b_k} f\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Q.E.D.

Bemerkung. Aus der Existenz des uneigentlichen Riemannschen Integrals einer stetigen Funktion folgt nicht in jedem Fall deren Lebesgue-Integrierbarkeit.

Beispiel 7.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ existiert im uneigentlichen Sinne. Die Funktion $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ist jedoch nicht Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$, da ihr Absolutbetrag nicht uneigentlich über $]-\infty, \infty[$ Riemannsch integrierbar ist.

Man sieht nämlich leicht, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren so, dass für alle genügend großen $N \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{-N\pi}^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq C_1 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq C_2 \log N$$

gilt. Andererseits lässt sich f durch $f(0) := 1$ stetig in die 0 fortsetzen und wird damit zu einer stetigen, gerade Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass das uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$ existiert, genügt es daher zu zeigen, dass $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ als uneigentliches Integral existiert. Mittels partieller Integration erhält man aber für jedes $N > \pi$

$$\int\limits_{\pi/2}^{N} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos N}{N} - \int\limits_{\pi/2}^{N} \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

und der erste Term auf der rechten Seite strebt für $N \to \infty$ gegen 0, während das Integral $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ absolut konvergent ist, da $\int\limits_{\pi/2}^{N} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < \infty$, und somit nach Korollar 7.8 als uneigentliches Riemannsches Integral existiert.

Ist $I = \langle a, b\rangle$ ein Intervall mit den „Endpunkten“ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so schreiben in Zukunft oft auch wieder $\int_a^b f\, dx$ anstelle von $\int_{\langle a,b\rangle} f\, dx$.

8 Lebesgue-messbare Mengen und das Lebesgue-Maß

Definition. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heiße **Lebesgue-messbar** (kurz: **messbar**), wenn jede über den $\mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion auch über A integrierbar ist, d.h. wenn aus $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ stets $f_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Wir werden später „anschaulichere“ Charakterisierungen der Messbarkeit einer Menge herleiten. Für beschränkte Mengen liefert der folgende Satz bereits eine einfachere Charakterisierung.

Satz 8.1. *Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ihre Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ integrierbar ist, d.h. wenn die Menge A integrierbar ist.*

Beweis. Sei Q ein kompakter Quader mit $A \subset Q$. Als Treppenfunktion ist $\mathbb{1}_Q$ integrierbar.
Ist nun A messbar, so ist folglich $(\mathbb{1}_Q)_A = \mathbb{1}_A$ integrierbar.
Ist umgekehrt $\mathbb{1}_A$ integrierbar und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so ist nach Satz 4.4 (iii) die Funktion $\mathbb{1}_A f = f_A$ integrierbar.

Q.E.D.

Der Beweis von Satz 8.1 zeigt zudem, dass jede integrierbare Menge messbar ist.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Ist die Menge A integrierbar, so hatten wir bereits das Volumen $v(A)$ definiert durch

$$v(A) = v_n(A) := \int_A 1\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A\, dx.$$

Ist A nicht integrierbar, so setzen wir $v(A) := \infty$. $v_n(A)$ heißt das **n-dimensionale Volumen** oder das **Lebesgue-Maß** von A. Im Fall $n = 2$ nennt man $v_2(A)$ auch den **Flächeninhalt** von A.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Mit $\mathcal{L}^1(A)$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller über A integrierbaren numerischen Funktionen $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Offenbar ist

$$\mathcal{L}^1(A) = \{f|_A : f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

$\mathcal{L}^1(A)$ wird mit der Halbnorm

$$f \mapsto \|f\|_{1,A} := \int_A |f(x)| dx$$

versehen. Die Konvergenzsätze aus Kapitel 7 übertragen sich dann unmittelbar auf über A integrierbare Funktionen, indem man $f \in \mathcal{L}^1(A)$ die Funktion $f_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ zuordnet.

8.1 Die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$

Es bezeichne $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^n$ die Menge aller Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Sei X eine nichtleere Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen von X heiße **σ-Algebra** (in X), falls gilt:

(σ1) $X \in \mathcal{A}$;

(σ2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(σ3) für jede Folge $\{A_k\}_k$ von Mengen in $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ in $\mathcal{A}$.

Satz 8.2. *$\mathfrak{M}^n$ bildet eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. (σ1) ist trivial.
Sei nun $A \in \mathfrak{M}$. Ist $f \in \mathcal{L}^1$, so ist also $f_A \in \mathcal{L}^1$, folglich auch $f_{A^c} = f - f_A$. Somit ist auch $A^c \in \mathfrak{M}$, womit (σ2) bewiesen ist.
Um (σ3) zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass mit $A, B \in \mathfrak{M}$ auch $A \cup B \in \mathfrak{M}$ ist. Sei $f \in \mathcal{L}^1$, wobei wir o.B.d.A. nach Korollar 4.5 $f \geq 0$ annehmen dürfen. Dann sind $f_A, f_B \in \mathcal{L}^1$, folglich auch $|f_A - f_B| \in \mathcal{L}^1$, und damit nach Korollar 4.5 $f_{A\cup B} = \max(f_A, f_B) \in \mathcal{L}^1$. Damit ist $A \cup B \in \mathfrak{M}$.
Per Induktion folgert man hieraus, dass endliche Vereinigungen messbarer Mengen messbar sind.
Sei schließlich $\{A_k\}_k$ eine beliebige Folge in $\mathfrak{M}$. Dann ist $B_k := \bigcup\limits_{j=0}^{k} A_j \in \mathfrak{M}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und die Folge $\{B_k\}_k$ bildet eine Ausschöpfung der Menge $A := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Da

$$\int\limits_{A_k} |f| dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f| dx \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

ist nach Korollar 7.7 die Funktion f über A integrierbar. Somit ist $A \in \mathfrak{M}$.
Q.E.D.

Der folgende Satz gilt insbesondere für $\mathcal{A} = \mathfrak{M}$:

Satz 8.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Dann gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$;

(iii) für jede Folge $\{A_k\}_k$ in $\mathcal{A}$ ist $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Beweis. Mittels der folgenden Identitäten ist dies eine direkte Konsequenz aus (σ1)–(σ3):

1. $\emptyset = X^c$;
2. $\bigcap\limits_k A_k = (\bigcup\limits_k A_k^c)^c$;

3. $A \setminus B = A \cap B^c$.

Q.E.D.

Wir zeigen als nächstes, dass jede offene Menge messbar ist. Es bezeichne dazu für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ $W_r(a)$ den achsenparallelen kompakten **Würfel**

$$W_r(a) := [a_1 - r, a_1 + r] \times \ldots \times [a_n - r, a_n + r].$$

Lemma 8.4. *Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Würfel $W_1, W_2, W_3, \ldots$, welche höchstens Randpunkte gemeinsam haben.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{W}_k$ die Menge aller „dyadischen " Würfel der Gestalt

$$W = I_1 \times \ldots \times I_n, \text{ mit } I_\nu = [m_\nu 2^{-k}, (m_\nu + 1)2^{-k}]$$

und $m_\nu \in \mathbb{Z}$, für $\nu = 1, \ldots, n$. Man zeigt dann leicht die folgende Eigenschaft:

$(*)$ Ist $W \in \mathcal{W}_k, W' \in \mathcal{W}_j$ mit $k \geq j$, so schneiden sich W und W' entweder höchstens in Randpunkten, oder es ist $W \subset W'$ (Übung).

Wir wählen nun rekursiv Würfel aus wie folgt:

Sei $\mathcal{W}_1^*$ die Menge aller Würfel $W \in \mathcal{W}_1$ mit $W \subset U$. Sind die Teilmengen $\mathcal{W}_1^* \subset \mathcal{W}_1$ bis $\mathcal{W}_{k-1}^* \subset \mathcal{W}_{k-1}$ bereits gewählt, so sei $\mathcal{W}_k^*$ die Menge alle Würfel $W \in \mathcal{W}_k$, für die gilt:

$(**)$ $W \subset U$, und W ist in keinem der Würfel W' aus $\mathcal{W}_1^* \cup \ldots \cup \mathcal{W}_{k-1}^*$ enthalten.

Sei dann $\mathcal{W} := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_k^*$. Die Menge aller Würfel aus $\mathcal{W}$ ist dann offenbar abzählbar, da dies für jedes $\mathcal{W}_k$ gilt, und nach $(*)$ und $(**)$ schneiden sich je zwei der Würfel aus $\mathcal{W}$ höchstens in Randpunkten.
Die Würfel aus $\mathcal{W}$ überdecken aber auch U, denn ist $x \in U$, so gibt es wegen der Offenheit von U mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ sowie dazu einen Würfel $W \in \mathcal{W}_k$ mit $x \in W \subset U$. Wählt man k minimal mit dieser Eigenschaft, so ist $W \in \mathcal{W}_k^* \subset \mathcal{W}$.

Q.E.D.

Bemerkung. Ersetzt man in obigem Argument die kompakten Würfel durch halboffene Würfel der Gestalt

$$]a_1 - r, a_1 + r] \times \ldots \times]a_n - r, a_n + r],$$

so erhält man mit demselben Argument

Lemma 8.5. *Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung halboffener Würfel $W_1, W_2, W_3, \ldots$, welche paarweise disjunkt sind.*

Da jeder kompakte Würfel messbar ist, ist nach Satz 8.2 und Lemma 8.4 jede offene Menge Lebesgue messbar, und nach Satz 8.3 damit auch jede abgeschlossene Menge.

Definition. Sei X eine nichtleere Menge, und $\mathcal{K} \subset \mathfrak{P}(X)$. Bezeichnet $\sum = \sum_{\mathcal{K}}$ die Menge aller σ-Algebren in X, welche $\mathcal{K}$ enthalten, so ist $\sigma(\mathcal{K}) := \bigcap\limits_{\mathcal{A} \in \Sigma} \mathcal{A}$ eine σ-Algebra, welche $\mathcal{K}$ enthält, und zwar offenbar die kleinste solche σ-Algebra. $\sigma(\mathcal{K})$ wird als **die von $\mathcal{K}$ erzeugte σ-Algebra** bezeichnet. (Beachte, dass $\mathfrak{P}(X) \in \Sigma$, so dass $\Sigma \neq \emptyset$.)

Ist $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Topologie auf X, so heißt $\sigma(\mathcal{T})$ die **σ-Algebra der Borelmengen in** X. Wir bezeichnen die σ-Algebra der Borelmengen im $\mathbb{R}^n$, d.h. die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra, mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}^n$.

Korollar 8.6. $\mathfrak{M}$ *enthält die σ-Algebra der Borelmengen im $\mathbb{R}^n$, wie auch sämtliche Lebesgueschen Nullmengen, d.h., $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} \subset \mathfrak{M}$.*

Beweis. Da $\mathcal{B}$ von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird und diese in $\mathfrak{M}$ liegen, ist $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}$. Ferner ist für jede Nullmenge N die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_N$ integrierbar, also $N \in \mathfrak{M}$.

Q.E.D.

Damit stellen sich „sehr viele“ Mengen als messbar heraus.

8.2 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Satz 8.7. *Sei $\{A_k\}_k$ eine Ausschöpfung des $\mathbb{R}^n$ durch integrierbare Mengen, z.B. $A_k := [-k, k]^n$. Dann ist die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar genau dann, wenn $M \cap A_k$ integrierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$, und es gilt in diesem Fall*

$$v(M) = \lim_{k \to \infty} v(M \cap A_k) = \|\mathbb{1}_M\|_1. \tag{8.1}$$

Beweis. Sei M messbar. Da $\mathbb{1}_{A_k}$ integrierbar ist, ist $(\mathbb{1}_{A_k})_M = \mathbb{1}_{A_k \cap M}$ integrierbar, d.h. $A_k \cap M$ ist eine integrierbare Menge für jedes $k \in \mathbb{N}$.
Ist umgekehrt $M_k := A_k \cap M$ integrierbar für jedes $k \in \mathbb{N}$, so ist M_k und damit auch $M = \bigcup\limits_k M_k$ messbar. Ferner ist nach Satz 4.3

$$v(M_k) = \int \mathbb{1}_{M_k}\, dx = \|\mathbb{1}_{M_k}\|_1 \leq \|\mathbb{1}_M\|_1.$$

Ist M integrierbar, so ist $\|\mathbb{1}_M\|_1 = v(M)$, und andernfalls ist $v(M) = \infty$, d.h. es folgt stets

$$v(M_k) \leq \min(v(M), \|\mathbb{1}_M\|_1).$$