Analysis III

Prof. Dr. B. Dreseler

WS 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

I. Das Lebesguesche Integral 5

1 Einführung 5

2 Integration von Treppenfunktionen 7

3 Die L^1-Halbnorm 11

4 Das Lebesguesche Integral: Elementare Eigenschaften 16
4.1 Integration über den $\mathbb{R}^n$ 16
4.2 Integration über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ 19

5 Zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale 21
5.1 Der Kleine Satz von Fubini 21
5.2 Berechnung von Volumina. Cavalierisches Prinzip 24

6 Lebesguesche Nullfunktionen und Nullmengen 26

7 Konvergenzsätze 30
7.1 Der Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer 30
7.2 Der Banachraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ 33
7.3 Der Satz von der monotonen Konvergenz 34

8 Lebesgue-messbare Mengen und das Lebesgue-Maß 36
8.1 Die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ 37
8.2 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes 40

9 Das äußere Maß 44

10 Translationsinvarianz und Vitalis Beispiel 48

11 Messbarkeit von Funktionen. Lemma von Fatou 49

12 Der Satz von Lebesgue 55

13 Parameterabhängige Integrale 56

14 Integration über einen Produktraum 58
14.1 Der Satz von Fubini 58
14.2 Der Satz von Tonelli 63

15 Der Transformationssatz **65**
15.1 Das Volumen eines Parallelotops 66
15.2 Die Transformationsformel 68
15.3 Ebene Polarkoordinaten 75
15.4 n-dimensionale Polarkoordinaten 76

16 Die Lebesgueschen L^p-Räume **80**

Literatur

I. Einige Bücher zur Integrationstheorie:

[K] K. Königsberger, Analysis 2, Springer-Lehrbuch (1993)
[A] H. Amann, J. Escher, Analysis III, Birkhäuser (2009)
[F] O. Forster, Analysis III, Vieweg
[R] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill (1987)

I. DAS LEBESGUESCHE INTEGRAL

1 Einführung

Das Ziel dieses ersten Teils der Vorlesung ist es, die Integrationstheorie, welche bisher nur für Funktionen einer Veränderlichen entwickelt worden ist, auf Funktionen in mehreren Veränderlichen auszudehnen. Ferner soll selbst im 1-dimensionalen Fall die Klasse der „integrierbaren“ Funktionen erheblich vergrößert werden. In der Analysis II wurde das **Riemannsche Integral** behandelt, zumindest für die Klasse der sogenannten Regelfunktionen (je nach Zugang).

Der Riemannsche Integralbegriff hat sich jedoch in mancherlei Hinsicht als unbefriedigend herausgestellt.
Der eine Grund dafür liegt darin, dass es diverse Funktionen gibt, denen man auf sinnvolle Weise ein Integral zuordnen sollte, welche jedoch nicht Riemannsch integrierbar sind.

Ein Beispiel dafür ist die **Dirichlet-Funktion** $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Diese ist nicht Riemannsch integrierbar, obwohl es gute Gründe gibt, ihr das Integral 0 zuzuordnen (vgl. Aufgabe 1.1). Beachte dazu, dass φ die charakteristische Funktion $\varphi = \mathbb{1}_A$ der Menge $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist, der man nach Aufgabe 1.1 sinnvollerweise den 1-dimensionalen Inhalt 0 zuordnen würde.

Dieses Beispiel zeigt zudem eine weitere fundamentale Fragestellung auf:

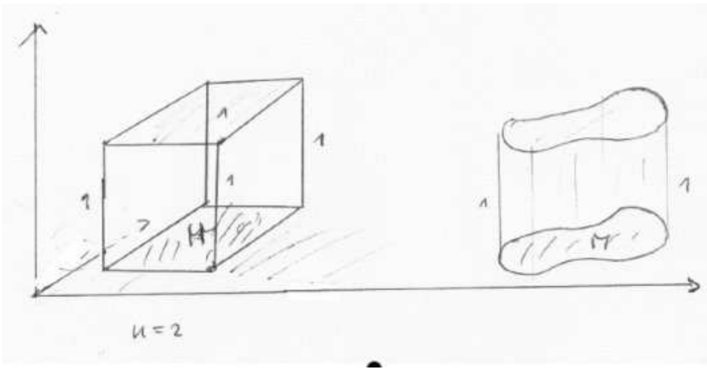
Kann man beliebigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner des $\mathbb{R}^n$) auf sinnvolle Weise einen 1-dimensionalen (oder allgemeiner einen n-dimensionalen) *Inhalt* (oft auch *n-dimensionales Volumen* genannt) zuordnen, d.h. den Inhalt „messen“ ?

Z.B. hätte das Intervall $I := [a,b]$ den 1-dimensionalen Inhalt $v_1(I) := (b-a)$ (dies ist gerade die Länge $|I|$ des Intervalls), allgemeiner hätte ein Quader $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ im $\mathbb{R}^n$ das n-dimensionale Volumen $v_n(Q) := (b_1-a_1)\dots(b_n-a_n)$, und der Menge $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ aus obigem Beispiel würde man nach Aufgabe 1.2 gerne den 1-dimensionalen Inhalt $v_1(A) := 0$ zuweisen.

Diese Frage führt in das Gebiet der **Maßtheorie**, die sich, grob gesagt, mit dem „Messen“ von Mengen beschäftigt (s. z.B. [R]). Nun hängen Maß und Integral anschaulich sehr eng zusammen:
Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner des $\mathbb{R}^n$), so sollte der 1-dimensionale Inhalt $v_1(M)$ (bzw. allgemeiner das n-dimensionale Volumen $v_n(M)$) von M gleich

dem Integral der charakteristischen Funktion von M sein (vorausgesetzt, dieses Integral existiert!), d.h. folgende Formel sollte in einer gescheiten Integrationstheorie gelten:

$$v_n(M) = \int \mathbb{1}_M(x)\, dx. \tag{1.1}$$



Wir werden daher i.W. [K] folgen und zunächst den Integralbegriff ausdehnen auf den des Lebesgueschen Integrals, und anschließend die Identität (1.1) zur *Definition* des Inhaltes oder Maßes $v_n(M)$ heranziehen. Wie wir allerdings sehen werden, ist es nicht möglich, beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf sinnvolle Weise ein n-dimensionales Volumen zuzuweisen, sondern nur den „Lebesgue-messbaren" Mengen. Mengen, die nicht messbar sind, sind allerdings nur schwer zu finden (mit Hilfe des Auswahlaxioms!) .

In der abstrakten Maßtheorie geht man in der Regel einen anderen Weg, und definiert zunächst das Maß geeigneter „messbarer" Mengen, und definiert damit im Anschluss das Integral (vgl. hierzu die Bemerkung im Anschluss an Theorem 11.7). Dieser Zugang ist allerdings zeitaufwändiger.

Ein weiterer, struktureller Grund für die Ausdehnung des Integralbegriffs ist der folgende: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemannsch integrierbar, so können wir in Analogie zur ℓ^1-Norm setzen

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx.$$

Man zeigt sofort, dass $\|\cdot\|_1$ eine **Halbnorm** auf dem Vektorraum $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{[a,b]}$ aller Riemannsch integrierbaren Funktion auf $[a, b]$ ist, d.h. es gilt

$$\|f\|_1 \geq 0, \quad \|\lambda f\|_1 = |\lambda|\ \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

für alle $f, g \in \mathcal{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\|\cdot\|_1$ ist allerdings keine Norm, denn ist z.B. $f(x) = 1$ für $x = a$ und $f(x) = 0$ für $x \neq a$, dann ist $f \in \mathcal{R},\ f \neq 0$, jedoch $\|f\|_1 = 0$).

Der Vektorraumaum $\mathcal{R}$, versehen mit dieser Halbnorm $\|\cdot\|_1$, ist jedoch nicht vollständig.

Beispiel. Für $k \geq 1$ sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^{-1/2}, & x > 1/k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f_k stückweise stetig ist, liegt f_k in $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{[0,1]}$. Ferner ist $\{f_k\}_k$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ eine Cauchy-Folge, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0 so, dass für $k, \ell \geq k_0$ stets $\|f_k - f_\ell\|_1 < \varepsilon$ ist. Gäbe es nun ein $f \in \mathcal{R}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$, so müsste gelten: $f(x) = x^{-1/2} + r(x)$, $x \in]0,1]$, wobei $r|_{[\delta,1]}$ für jedes $\delta > 0$ eine Riemannsch integrierbare Funktion ist mit $\int_\delta^1 |r(x)|dx = 0$. Nach Aufgabe 1.3 ist dann aber die Menge $\{x \in]0,1] : |r(x)| \leq 1\}$ dicht in $[0,1]$. Insbesondere gibt es also eine Nullfolge $\{x_j\}_j$ in $]0,1]$ mit $|r(x_j)| \leq 1$. Andererseits gilt $x_j^{-1/2} \to \infty$, und folglich müsste f unbeschränkt sein. Da Riemannsch integrierbare Funktionen beschränkt sind, führt dies zum Widerspruch.

Nachdem bereits eine Vielzahl verschiedener Verallgemeinerungen des Riemannschen Integralbegriffs aufgestellt worden waren, gelang es H. Lebesgue (1875—1941) um die vorletzte Jahrhundertwende einen Integralbegriff einzuführen, welcher all diese Probleme behebt und zu einer leistungsfähigen Integrationstheorie geführt hat.
Es sollte noch erwähnt werden, dass inzwischen eine Reihe recht unterschiedlicher Zugänge zum Lebesgueschen Integral entdeckt worden sind, welche jedoch allesamt äquivalent sind.
Bei dem von uns gewählten Zugang werden wir für beliebige Funktionen f auf dem $\mathbb{R}^n$ deren „L^1-Halbnorm $\|f\|_1$“ definieren. Der Raum der integrierbaren Funktionen wird dann der Abschluss (also eine „konkrete“ Vervollständigung) des Raumes aller Treppenfunktionen bzgl. dieser Halbnorm sein.

2 Integration von Treppenfunktionen

Definitionen.

(i) Seien X eine Menge und $A \subset X$ eine Teilmenge. Unter der **charakteristischen Funktion** (oder auch **Indikatorfunktion**) von A versteht man die Funktion $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \in X \setminus A \end{cases}$$

definiert ist (man schreibt oft auch χ_A anstelle von $\mathbb{1}_A$).

(ii) Ein **Quader** Q im $\mathbb{R}^n$ ist das direkte Produkt $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ von n beschränkten, nichtleeren Intervallen $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Ist I ein Intervall mit den Endpunkten $a \leq b$, so bezeichne $v_1(I) := |I| = b - a$ seine **Länge**. Allgemeiner ist das (n-dimensionale) **Volumen** des Quaders $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ definiert durch
$$v_n(Q) := |I_1| \cdots |I_n|,$$
d.h. $v_n(Q)$ ist das Produkt der Kantenlängen des Quaders. Oftmals werden wir in Situationen, in denen klar ist, dass wir das n-dimensionale Volumen meinen, auch nur kurz $v(Q)$ anstelle von $v_n(Q)$ schreiben. Ist Q **ausgeartet**, d.h. liegt Q in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, so ist $v_n(Q) = 0$.

(iii) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heiße **Treppenfunktion**, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_s$ gibt so, dass

  (a) φ auf jedem dieser Quader konstant ist, und

  (a) $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s} Q_j$,

d.h. wenn φ die Gestalt
$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j} \tag{2.1}$$
hat, mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ und paarweise disjunkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_s$.

Lemma 2.1. *Eine Funktion φ der Gestalt (2.1) ist auch dann eine Treppenfunktion, wenn die Quader $Q_1, \ldots, Q_s$ nicht paarweise disjunkt sind.*

Beweis. Übung.

Beispiel 2.2 (Treppenfunktionen und Riemannsche Summen). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und sei $Z = \{x_0, \ldots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, d.h. es gelte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$. Sei $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ das j-te Teilintervall dieser Zerlegung, und sei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in I_1, \times \cdots \times I_m$ ein m-Tupel von Stützstellen zur Zerlegung Z. Die zugehörige Treppenfunktion*
$$\varphi_{Z,\xi} := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, \mathbb{1}_{I_j}$$
besitzt dann gerade das Integral
$$\int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, |I_j| = S(f, Z, \xi),$$
wobei $S(f, Z, \xi)$ die Riemannsche Summe von f bzgl. Z und ξ bezeichne.

Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathcal{T}$ gerade die lineare Hülle der Menge aller charakteristischen Funktionen von Quadern, also insbesondere ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es gilt sogar

Lemma 2.3. *$\mathcal{T}$ ist eine Algebra über $\mathbb{C}$; insbesondere sind Summen und Produkte von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktion.*

Beweis. Da die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Algebra bildet, welche $\mathcal{T}$ enthält, muss nur noch gezeigt werden, dass mit $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ auch die Produktfunktion $\varphi\psi$ in $\mathcal{T}$ liegt. Sind jedoch φ und ψ von der Gestalt (2.1), d.h. ist

$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}, \quad \psi = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \mathbb{1}_{P_k},$$

mit Quadern Q_j und P_k und $\lambda_j, \mu_k \in \mathbb{C}$, so ist

$$\varphi\psi = \sum_{j,k} (\lambda_j \mu_k) \mathbb{1}_{Q_j} \mathbb{1}_{P_k}.$$

Da $\mathbb{1}_{Q_j} \mathbb{1}_{P_k} = \mathbb{1}_{Q_j \cap P_k}$ ist, und da mit Q_j und P_k auch $Q_j \cap P_k$ ein Quader ist (oder leer), folgt die Behauptung. Q.E.D.

Definition. Unter dem **Integral der Treppenfunktion** $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}$ versteht man die Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int \varphi \; dx := \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v(Q_j) \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Ist z.B. $\varphi_{Z,\xi}$ die einer Riemannsumme in Beispiel 2.2 zugeordnete Treppenfunktion, so ist offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = \int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx = S(f, Z, \xi).$$

Satz 2.4. *Die Definition des Integrals einer Treppenfunktion φ hängt nicht von ihrer expliziten Darstellung (2.1) ab. Ferner gelten die folgenden Rechenregeln: Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist*

(i) $\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\; dx = \alpha \int \varphi \; dx + \beta \int \psi \; dx$ *(Linearität)*

(ii) $|\int \varphi \; dx| \le \int |\varphi| \; dx$ *(„Dreiecksungleichung“)*

(iii) $\int \varphi \; dx \le \int \psi \; dx$, *falls φ und ψ reellwertig sind und $\varphi \le \psi$.* *(Monotonie)*

Beweis. Per Induktion nach der Dimension n: Ist $n = 1$, so folgen die Behauptungen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Riemannschen Integrals, da jede Treppenfunktion Riemannsch integrierbar ist über jedes kompakte Intervall $[a, b]$, welches alle Intervall Q_j enthält, wobei offenbar das durch (2.2) definierte Integral mit dem Riemannschen Integral über $[a, b]$ übereinstimmt.

Wir nehmen nun an, dass die Aussagen für alle Dimensionen $m < n$ gelten.
Sei $1 \leq p < n$, und zerlege $\mathbb{R}^n = X \times Y$, mit $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^{n-p}$. Entsprechend schreiben wir jeden Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ als direktes Produkt

$$Q = Q' \times Q''$$

der Quader $Q' := I_1 \times \ldots \times I_p \subset X$ und $Q'' := I_{p+1} \times \ldots \times I_n \subset Y$. Für $z = (x, y) \in X \times Y$ ist dann

$$\mathbb{1}_Q(z) = \mathbb{1}_{Q'}(x)\mathbb{1}_{Q''}(y).$$

Sei nun $\varphi = \sum_j \lambda_j \mathbb{1}_{Q_j}$ eine Treppenfunktion auf $X \times Y$. Für jedes $y \in Y$ ist dann $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ eine Treppenfunktion auf X, da

$$\varphi_y = \sum_j \lambda_j \mathbb{1}_{Q''_j}(y)\mathbb{1}_{Q'_j}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist das Integral von φ_y über X unabhängig von der Darstellung (2.1) von φ wohldefiniert und gegeben durch

$$\int_X \varphi_y(x)\ dx = \sum_j \lambda_j v_p(Q'_j)\mathbb{1}_{Q''_j}(y) =: \Phi(y).$$

Φ ist offenbar eine Treppenfunktion auf Y.
Wiederum nach Induktionsannahme ist das Integral von Φ wohldefiniert und gegeben durch

$$\int_Y \Phi(y)dy = \sum_j \lambda_j v_p(Q'_j)v_{n-p}(Q''_j).$$

Somit folgt insgesamt

$$\int_Y \left(\int_X \varphi_y(x)\ dx\right) dy = \sum_k \lambda_k v_n(Q_k). \tag{2.3}$$

Die linke Seite von (2.3) hängt nicht von der Darstellung (2.1) von φ ab. Damit ist die Definition des Integrals von φ durch die rechte Seite von (2.3) gerechtfertigt. Ferner gilt nach (2.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)\ dx\right) dy. \tag{2.4}$$

Mittels (2.4) folgen nun auch die Aussagen (i) – (iii) unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für Räume der Dimension $m < n$. Q.E.D.

Schreiben wir anstelle von $\int_X \varphi_y(x)\,dx$ einfacher $\int_X \varphi(x,y)\,dx$, so haben wir mit (2.4) gleichzeitig folgendes Ergebnis bewiesen:

Korollar 2.5 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen). *Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Beweises gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{T}$*

$$\int_{X\times Y} \varphi(x,y)d(x,y) = \int_Y \left(\int_X \varphi(x,y)\ dx\right) dy. \tag{2.5}$$

3 Die L^1-Halbnorm

Vorbemerkung. In der Integrationstheorie werden des öfteren divergente Reihen der Gestalt $\sum\limits_j a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}_0^+$ auftreten. Wir schreiben dann kurz $\sum\limits_j a_j = \infty$. Dies legt nahe, Funktionen und Reihen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ zu betrachten. *Speziell für die Integrationstheorie werden wir folgende Regeln für das Rechnen mit ∞ benutzen:*

$$\begin{aligned}
&|\infty| := \infty\ ; \qquad \overline{\infty} := \infty,\\
&r < \infty \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \infty \leq \infty,\\
&\infty + c = c + \infty := \infty \quad \forall c \in \mathbb{C}\cup\{\infty\},\\
&\infty \cdot c = c \cdot \infty := \infty \quad \forall c \in \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\},\\
&\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty := 0.
\end{aligned}$$

Terme $c-\infty$ sind als $c+(-1)\infty = c+\infty = \infty$ zu deuten. Schließlich ordnen wir einer Folge $\{a_j\}_j$ in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ den „Grenzwert“ $\lim a_j := \infty$ zu, falls alle Folgenglieder ab einem gewissen Index gleich ∞ sind, oder falls $|a_j|$ gegen ∞ strebt. Insbesondere ist $\sum_j a_j = \infty$, falls $a_j \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und ein j_0 existiert mit $a_{j_0} = \infty$.
Dementsprechend werden wir oft Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ zulassen. Im Gegensatz zu **reellen** Funktionen bzw. **komplexen** Funktionen, welche Werte in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ annehmen, werden wir Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ als **numerische Funktionen** bezeichnen.
Zur Abkürzung werden wir die Menge $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ oft mit $[0,\infty]$ bezeichnen.

Definitionen.

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ eine numerische Funktion. Unter einer **Hüllreihe** zu f verstehen wir eine Funktionenreihe

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{Q_k}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Mengen Q_k sind *offene* Quader im $\mathbb{R}^n$, und $a_k \in \mathbb{R}_0^+$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{Q_k}(x).$$

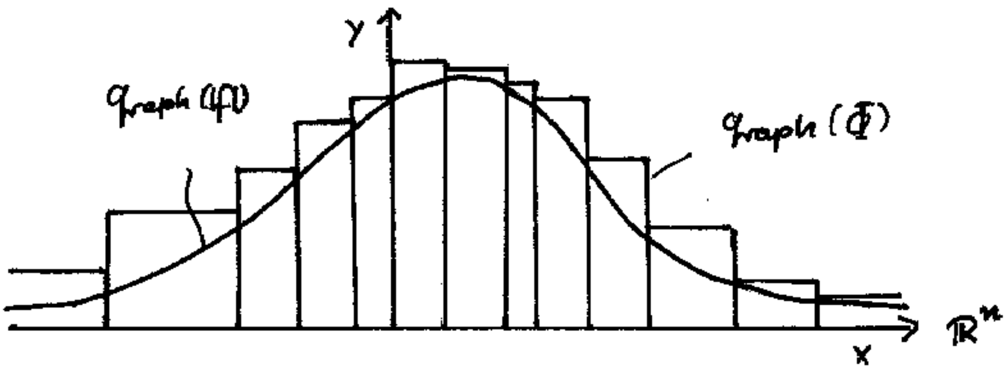
(ii) Der **Inhalt** der Hüllreihe Φ ist definiert durch

$$I(\Phi) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k v(Q_k) \in [0, \infty].$$

(iii) Unter der **L^1-Halbnorm** $\|f\|_1$ einer numerischen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ verstehen wir das Infimum der Inhalte aller Hüllreihen zu f, d.h.

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \text{ ist Hüllreihe zu } f\}.$$

Da jede numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Hüllreihe $\Phi_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{]-k,k[^n}$ besitzt, ist $\|f\|_1$ stets eine nicht-negative Zahl oder ∞, d.h. $\|f\|_1 \in [0, \infty]$.



Interpretation. $\|f\|_1$ ist ein „äußeres“ Maß für das $(n+1)$-dimensionale Volumen des Gebietes

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ 0 \leq y \leq |f(x)|\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

welches durch die Ebene $\{y = 0\}$ und den Graphen $\mathcal{G}(|f|) = \{(x, |f(x)|) : x \in \mathbb{R}^n\}$ von $|f|$ begrenzt wird.
Es ist übrigens für den zu entwickelnden Integrationsbegriff entscheidend, Hüllreihen mit unendlich vielen Termen zuzulassen – andernfalls würden wir nicht auf den Lebesgueschen, sondern den Riemannschen Integralbegriff geführt.

Lemma 3.1. *Für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\|cf\|_1 = |c|\ \|f\|_1$;

(ii) $\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$;

(iii) $|f| \le |g| \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 \le \|g\|_1$.

Beweis. Die Regeln (i) und (iii) sind unmittelbar einzusehen. Die Regel (ii) ist wegen $|f + g| \le |f| + |g|$ und (iii) ein Spezialfall der folgenden Ungleichung:

Lemma 3.2 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung). *Für jede Folge nicht-negativer numerische Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ gilt:*

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\|_1 \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis. Es genügt, den Fall $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty$ zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle dann zu jeder Funktion f_k eine Hüllreihe $\Phi_k = \sum\limits_j a_{kj}\, \mathbb{1}_{Q_{kj}}$ mit Inhalt

$$I(\Phi_k) = \sum_j a_{kj} v(Q_{kj}) \le \|f_k\|_1 + \varepsilon 2^{-k-1}.$$

Die Doppelreihe $\Phi := \sum\limits_{k,j} a_{kj} \mathbb{1}_{Q_{kj}}$ (genauer: die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{\nu(i)} \mathbb{1}_{Q_{\nu(i)}}$, wobei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine (beliebige) Bijektion sei) ist dann eine Hüllreihe zu $f := \sum\limits_k f_k$. Ihr Inhalt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= \sum_{k,j} a_{kj}\, v(Q_{kj}) = \sum_k \left(\sum_j a_{kj}\, v(Q_{kj}) \right) \\ &= \sum_k I(\Phi_k) \le \sum_{k=0}^{\infty} (\|f_k\|_1 + \varepsilon 2^{-k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

(zur Erinnerung: Reihen mit nicht-negativen Termen dürfen beliebig umgeordnet werden!).
Somit ist $\|\sum\limits_k f_k\|_1 \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + \varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt.

Q.E.D.

Beispiel 3.3. Sei $H = \{x_j = a\}$ eine achsenparallele Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, z.B. $H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = a\}$. Dann ist $\|\mathbb{1}_H\|_1 = 0$. Insbesondere ist $\|\mathbb{1}_Q\|_1 = 0$ für jeden ausgearteten Quader Q.

Setzen wir nämlich $Q_k :=]a - \varepsilon 2^{-k}, a + \varepsilon 2^{-k}[\times] - k, k[^{n-1}$ für $k \geq 1$ (mit $\varepsilon > 0$), so ist $H \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, folglich $\Phi_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$ eine Hüllreihe zu $\mathbb{1}_H$, mit Inhalt

$$I(\Phi_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{1-k} (2k)^{n-1} = \varepsilon A,$$

mit einer endlichen Konstanten A. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\|\mathbb{1}_H\|_1 = 0$.

Wir wollen nun die wichtige Tatsache beweisen, dass die L^1-Halbnorm einer nicht-negativen Treppenfunktion gleich ihrem Integral ist.

Lemma 3.4 (Fundamentallemma). *Für die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ eines kompakten Quaders A gilt*

$$\|\mathbb{1}_A\|_1 = v(A) = \int \mathbb{1}_A \, dx.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und wähle dazu einen offenen Quader Q mit $A \subset Q$ und $v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$. Dann ist $\Phi := \mathbb{1}_Q$ eine Hüllreihe zu $\mathbb{1}_A$ mit Inhalt $I(\Phi) = v(Q) \leq v(A) + \varepsilon$. Es folgt

$$\|\mathbb{1}_A\|_1 \leq v(A).$$

Ist umgekehrt $\Phi = \sum\limits_k a_k \mathbb{1}_{Q_k}$ eine beliebige Hüllreihe zu $\mathbb{1}_A$, so ist $1 \leq \Phi(x)$ für jedes $x \in A$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es daher zu jedem $x \in A$ einen Index $N = N(x)$ mit

$$1 - \varepsilon < \sum_{k=0}^{N} a_k \mathbb{1}_{Q_k}(x).$$

Wegen der Offenheit der Q_k bleibt diese Ungleichung für alle Punkte einer offenen Umgebung $U(x)$ von x gültig. Da A kompakt ist, können wir A mit endlich vielen solchen Umgebungen $U(x_1), \dots, U(x_p)$ überdecken. Für $M := \max\{N(x_1), \dots, N(x_p)\}$ folgt:

$$(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_A \leq \sum_{k=0}^{M} a_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Da beide Seiten dieser Ungleichung Treppenfunktionen sind, erhalten wir durch Integration mit Hilfe von Lemma 3.1 (iii)

$$(1 - \varepsilon)v(A) \leq \sum_{k=0}^{M} a_k v(Q_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k v(Q_k) = I(\Phi),$$

und zwar für jedes $\varepsilon > 0$, also $v(A) \le I(\Phi)$. Da dies für jede Hüllreihe Φ zu $\mathbb{1}_A$ gilt, folgt
$$v(A) \le \|\mathbb{1}_A\|_1.$$
Q.E.D.

Lemma 3.5. *Für jede Treppenfunktion f auf $\mathbb{R}^n$ gilt $\|f\|_1 = \int |f|\,dx$.*

Beweis. Ist $Q = \langle a_1, b_1\rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n\rangle$ ein beliebiger Quader (hier bezeichne $\langle a, b\rangle$ ein beliebiges Intervall mit den Endpunkten $a \le b$), so ist der Abschluss $\overline{Q}$ von Q der kompakte Quader
$$\overline{Q} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$
Ferner ist offenbar $v(Q) = v(\overline{Q})$.
Sei nun f eine beliebige Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$. Wegen $\|f\|_1 = \|\,|f|\,\|_1$ dürfen wir o.B.d.A. $f \ge 0$ annnehmen. Sei
$$f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{Q_k} \tag{3.1}$$
eine Darstellung von f mit paarweise disjunkten Quadern Q_k und Koeffizienten $a_k > 0$. Nach den Lemmata 3.1, 3.2 folgt
$$\|f\|_1 \le \sum_k \|a_k \mathbb{1}_{Q_k}\|_1 = \sum_k a_k \|\mathbb{1}_{Q_k}\|_1.$$
Ferner ist $\mathbb{1}_{Q_k} \le \mathbb{1}_{\overline{Q}_k}$, also $\|\mathbb{1}_{Q_k}\|_1 \le \|1_{\overline{Q}_k}\|_1$, und nach dem Fundamentallemma 3.4 ist $\|\mathbb{1}_{\overline{Q}_k}\|_1 = v(\overline{Q}_k) = v(Q_k)$. Damit ergibt sich insgesamt
$$\|f\|_1 \le \sum_k a_k v(Q_k) = \int f\ dx. \tag{3.2}$$
Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, wählen wir einen genügend großen kompakten Quader A so, dass $Q_k \subset A$ ist für alle Quader Q_k in (3.1), und setzen $m := \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Dann ist $f(x) = 0$ für $x \notin A$, und $f(x) \le m\ \forall x \in A$. Somit ist
$$g := m\mathbb{1}_A - f$$
eine nicht-negative Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$, für welche nach (3.2) gilt:
$$\|g\|_1 \le \int g\ dx = mv(A) - \int f\ dx.$$
Ferner ist nach dem Fundamentallemma $\|g + f\|_1 = \|m\mathbb{1}_A\|_1 = mv(A)$, so dass gilt
$$\begin{aligned}\int f\ dx &\le mv(A) - \|g\|_1 = \|f + g\|_1 - \|g\|_1 \\ &\le \|f\|_1 + \|g\|_1 - \|g\|_1 = \|f\|_1.\end{aligned}$$
Zusammen mit (3.2) ergibt sich die Behauptung. Q.E.D.