4 Das Lebesguesche Integral und seine elementaren Eigenschaften

4.1 Integration über den $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heiße **Lebesgue-integrierbar über den $\mathbb{R}^n$** (kurz: **integrierbar**), wenn es eine Folge $\{\varphi_k\}_k$ von Treppenfunktionen gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0, \tag{4.1}$$

oder, äquivalent dazu, wenn sich f beliebig genau in der L^1-Halbnorm durch Treppenfunktionen approximieren lässt, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ_ε gibt mit $\|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Offenbar ist dann $\|f\|_1 < \infty$.

4.1 (Lemma und Definition). *Für jede Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\mathcal{T}$ mit (4.1) ist die Folge der Integrale $\{\int \varphi_k \, dx\}_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, also konvergent. Ferner hängt der Grenzwert nicht von der Approximationsfolge $\{\varphi_k\}_k$ ab, sondern nur von f. Wir bezeichnen diesen als das* **(Lebesgue)-Integral von** *f, und schreiben dafür $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ oder kurz $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx$, $\int f d^n x$ bzw. $\int f \ dx$, d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Beweis. Für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ gilt nach Lemma 3.5 und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\int \varphi\, dx - \int \psi\, dx| &= |\int (\varphi - \psi)\, dx| \le \int |\varphi - \psi|\, dx = \|\varphi - \psi\|_1 \\ &\le \|f - \varphi\|_1 + \|f - \psi\|_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgen leicht die Behauptungen.

Q.E.D.

Bemerkungen 4.2. (i) Offenbar ist jede Treppenfunktion φ integrierbar, und ihr Lebesgue-Integral stimmt mit dem in Paragraph 6 definierten Integral überein.

(ii) Während aus $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_\infty = 0$ die punktweise Konvergenz von $\{\varphi_k\}_k$ gegen f folgt, kann dies aus $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ i.a. nicht gefolgert werden. Wir werden später sehen, dass man jedoch stets eine Teilfolge $\{\varphi_{k_j}\}_j$ auswählen kann, welche „fast überall“ punktweise gegen f konvergiert.

Satz 4.3. *Mit f ist auch $|f|$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und es gilt*

$$|\int f \ dx| \le \int |f|\, dx = \|f\|_1. \tag{4.3}$$

Bemerkung. Bei anderen Zugängen zum Lebesgueschen Integral wird die L^1-Halbnorm von f oft durch die Identität auf der rechten Seite von (4.3) definiert.

Beweis. Sei $\{\varphi_k\}_k$ eine Folge in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$. Aus $|\,|f| - |\varphi_k|\,| \leq |f - \varphi_k|$ folgt mittels der Monotonie der L^1-Halbnorm

$$\|\,|f| - |\varphi_k|\,\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1.$$

Insbesondere ist $\lim_{k\to\infty} \|\,|f| - |\varphi_k|\,\|_1 = 0$, d.h. $|f|$ ist integrierbar, und es folgt

$$\begin{aligned} \left|\int f\ dx\right| &= \left|\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\, dx\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\int \varphi_k\, dx\right| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k|\, dx = \int |f|\, dx. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\int |f|\, dx = \|f\|_1$.
Nun gilt aber

$$\|f\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1,$$

wobei $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k|\, dx = \int |f|\, dx$ ist. Für $k \to \infty$ erhalten wir damit

$$\|f\|_1 \leq \int |f|\, dx \leq \|f\|_1$$

Q.E.D.

Satz 4.4. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) Die Funktionen $\alpha f + \beta g$ und $\overline{f}$ sind integrierbar, und

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx, \qquad \textit{(Linearität)}$$
$$\int \overline{f}\ dx = \overline{\int f\ dx}.$$

(ii) Für reelles f und g folgt aus $f \leq g$

$$\int f\ dx \leq \int g\ dx \qquad \textit{(Monotonie)}$$

(iii) Ist g zusätzlich beschränkt, so ist auch fg integrierbar, und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \tag{4.4}$$

Beweis.

(i) Sind $\{\varphi_k\}_k, \{\psi_k\}_k$ Folgen in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0 = \lim_{k\to\infty} \|g - \psi_k\|_1$, so sind $\{\alpha\varphi_k + \beta\psi_k\}_k$ und $\{\overline{\varphi}_k\}_k$ Folgen in $\mathcal{T}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|(\alpha f + \beta g) - (\alpha\varphi_k + \beta\psi_k)\|_1 = 0$ bzw. $\lim_{k\to\infty} \|\overline{f} - \overline{\varphi_k}\|_1 = 0$. Die Behauptung folgt nun leicht aus Satz 2.4.

(ii) Nach Satz 4.3 und (i) gilt

$$\int g\,dx - \int f\,dx = \int (g-f)\,dx = \|g-f\|_1 \geq 0.$$

(iii) Sei o.B.d.A. $M := \|g\|_\infty > 0$. Sei $\varepsilon > 0$, und wähle $\varphi \in \mathcal{T}$ mit $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon/2M$. Sei $N := \|\varphi\|_\infty + 1$, und wähle nun $\psi \in \mathcal{T}$ mit $\|g-\psi\|_1 < \varepsilon/2N$.

Aus

$$\begin{aligned} |fg - \varphi\psi| &\leq |f-\varphi|\;|g| + |\varphi|\;|g-\psi| \\ &\leq M|f-\varphi| + N|g-\psi| \end{aligned}$$

folgt dann

$$\|fg - \varphi\psi\|_1 \leq M\|f-\varphi\|_1 + N\|g-\psi\|_1 < \varepsilon.$$

Somit ist fg integrierbar, und aus $|fg| \leq M|f|$ folgt mit (i) und (ii)

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\,dx \leq M \int |f|\,dx = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Q.E.D.

Korollar 4.5. *(i) Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn die reellen Funktionen $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ dies sind, und es gilt dann*

$$\int f\;dx = \int \mathrm{Re}\,(f)\,dx + i\int \mathrm{Im}\,(f)\,dx.$$

(ii) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reelle integrierbare Funktionen, dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad \textit{und} \\ \min(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{aligned}$$

integrierbar. Insbesondere sind der **positive Anteil** $f^+ := \max(f,0)$ *und der* **negative Anteil** $f^- := \max(-f,0)$ *von f integrierbar.*

Bemerkung 4.6. Offenbar zerlegt sich f als Differenz der beiden nicht-negativen Funktionen f^+ und f^-, d.h.

$$f = f^+ - f^-. \tag{4.5}$$

Mittels des Korollars kann man sich bei vielen Beweisen auf den Fall nicht-negativer reeller Funktionen beschränken.

4.2 Integration über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Definitionen.

(i) Sei $f : B \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine numerische Funktion auf einer Teilmenge B des $\mathbb{R}^n$. Ist A eine Teilmenge von B, so verstehen wir unter der **trivialen Fortsetzung** f_A von f folgende Funktion $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

(ii) f heiße **über** $A \subset \mathbb{R}^n$ **integrierbar**, falls die triviale Fortsetzung f_A über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx$$

das **(Lebesgue)-Integral von f über** A. Wir setzen

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1.$$

Die im Abschnitt 4.1 bewiesenen Resultate gelten dann offenbar sinngemäß auch bei der Integration über eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt für jede über A integrierbare numerische Funktion

$$\|f\|_{1,A} = \int_A |f(x)|\,dx. \tag{4.6}$$

VORSICHT: Ist f über den $\mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist i.a. f keineswegs über jede Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ integrierbar! Allerdings gibt es eine sehr große Klasse von Mengen, die sogenannten „Lebesgue-messbaren“ Mengen, über welche jede auf dem $\mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion integrierbar ist. Darauf kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Satz 4.7. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede Riemannsch integrierbare Funktion $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und ihr Riemannsches Integral stimmt mit dem Lebesgueschen überein, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Riemannsch integrierbar, mit Riemannschem Integral $S := \int_a^b f(x)\,dx$. Indem wir die Funktion f in ihren Real- und Imaginärteil zerlegen, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass f reell ist. Sei dann $\varepsilon > 0$, und wähle $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ in Intervalle $I_j, j = 1 \dots m$, der Feinheit $|Z| < \delta$ und jeden Vektor ξ von zugehörigen Stützstellen gilt

$$|S(f, Z, \xi) - S| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Seien Z eine solche Zerlegung und ξ ein solcher Vektor von Stützstellen, und sei

$$\varphi_{Z,\xi} := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, \mathbb{1}_{I_j}$$

die in Beispiel 2.2 zugeordnete Treppenfunktion. Seien ferner $A_j := \sup I_j,\ a_j := \inf I_j$, und seien

$$\varphi_u := \sum_{j=1}^{m} A_j\, \mathbb{1}_{I_j} \leq \varphi_{Z,\xi} \leq \varphi_o := \sum_{j=1}^{m} a_j\, \mathbb{1}_{I_j}$$

die zugehörige Riemannsche „Oberfunktion“ φ_o bzw. „Unterfunktion“ φ_u, welche Treppenfunktionen sind. Offenbar gilt dann auch

$$\varphi_u \leq f \leq \varphi_o,$$

so dass

$$|f - \varphi_{Z,\xi}| \leq \varphi_o - \varphi_u,$$

und folglich

$$\|f - \varphi_{Z,\xi}\|_1 \leq \int (\varphi_o - \varphi_u)\, dx = (\sum_{j=1}^{m} A_j |I_j| - S) - (\sum_{j=1}^{m} a_j |I_j| - S).$$

Die beiden Summen $\sum_{j=1}^{m} A_j |I_j|$ und $\sum_{j=1}^{m} a_j |I_j|$ lassen sich aber beliebig gut durch Riemannsche Summen zur Zerlegung Z approximieren, so dass man mit Hilfe von (4.7) leicht sieht, dass

$$\|f - \varphi_{Z,\xi}\|_1 < 4\varepsilon.$$

Dies zeigt, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Ferner zeigt Beispiel 2.2 in Verbindung mit (4.7), dass

$$|\int_a^b \varphi_{Z,\xi}(x)\, dx - S| < \varepsilon,$$

Folglich stimmt S mit dem Lebegueschen Integral von f über $[a,b]$ überein.

Q.E.D.

5 Zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale

In der Analysis I wurde gezeigt, dass sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beliebig genau gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lässt. Diese Aussage lässt sich mit fast wortgleichem Beweis auf stetige Funktionen auf beliebigen kompakten Quadern im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Damit erhält man ganz ähnlich wie in Satz 4.7, dass stetige Funktionen über kompakte Quader des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar sind. Allgemeiner gilt der folgende

Satz 5.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f über K integrierbar.*

Beweis. Später. Für einen direkten Beweis, siehe [K].

5.1 Der Kleine Satz von Fubini

Wie lässt sich nun „konkret“ das Integral einer Funktion $f \in C(K, \mathbb{C})$ wie in Satz 5.1 berechnen? Die wichtigste Methode besteht darin, mittels einer Verallgemeinerung von Korollar 2.5 mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführen.

Wir zerlegen dazu wieder $\mathbb{R}^n = X \times Y$, mit $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$, $p+q = n$.

Definitionen. Seien $A \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$.

(i) Wir setzen

$$\begin{aligned} A_y &:= \{x \in X : (x,y) \in A\} \subset X, \\ {}_xA &:= \{y \in Y : (x,y) \in A\} \subset Y. \end{aligned}$$

A_y bzw. ${}_xA$ heißt die **Schnittmenge von** A **zu** $y \in Y$ bzw. **zu** $x \in X$.

(ii) Ist $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine numerische Funktion, so definieren wir

$$\begin{aligned} f_y &: A_y \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ f_y(x) := f(x,y), \\ {}_xf &: {}_xA \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ {}_xf(y) := f(x,y). \end{aligned}$$

Ist f_y über A_y (bzw. ${}_xf$ über ${}_xA$) integrierbar, so setzen wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_y} f(x,y)\,dx &:= \int_{A_y} f_y(x)\,d^px, \\ \int\limits_{{}_xA} f(x,y)\,dy &:= \int\limits_{{}_xA} {}_xf(y)\,d^qy. \end{aligned}$$

Schließlich bezeichne $\pi_1 : X \times Y \to X,\ (x,y) \mapsto x$ und $\pi_2 : X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y$ die Projektionen auf die erste bzw. 2. Koordinate des Produktraumes $X \times Y$. Da π_1 und π_2 stetig sind, sind offenbar $\pi_1(A)$ und $\pi_2(A)$ kompakt, falls $A \subset X \times Y$ kompakt ist. Ferner ist z.B.

$$\pi_2(A) = \{y \in Y : A_y \neq \emptyset\}. \tag{5.1}$$

Satz 5.2 (Kleiner Satz von Fubini). *Sei $A \subset X \times Y$ kompakt, und sei $f : A \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere $F : \pi_2(A) \to \mathbb{C}$ durch*

$$F(y) := \int\limits_{A_y} f(x,y)\,dx.$$

Dann ist F integrierbar über $\pi_2(A)$, und es gilt

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_2(A)} F(y)\,d^q y,$$

d.h.

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_2(A)} \Big(\int\limits_{A_y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy. \tag{5.2}$$

Analog ist auch

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_1(A)} \Big(\int\limits_{{}_xA} f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \tag{5.3}$$

Beweis. Später. Für den direkten Beweis, siehe [K].

Wichtiger Spezialfall.

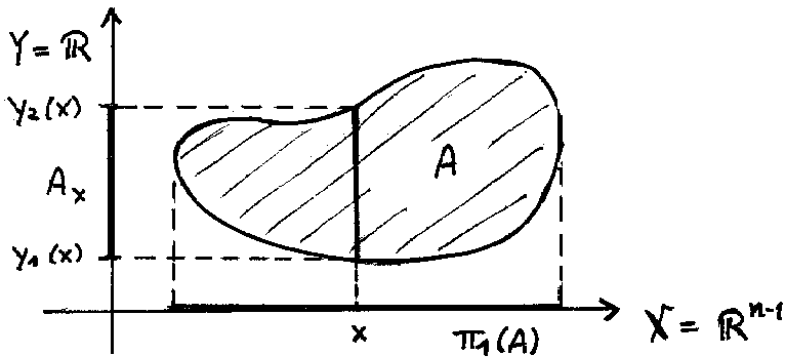
$$A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = X \times Y$$

sei kompakt, und für jedes $x \in \pi_1(A)$ sei ${}_xA$ ein (kompaktes) Intervall

$${}_xA = [y_1(x), y_2(x)]. \tag{5.4}$$

Dann gilt nach den obigen Sätzen und Satz 4.7 für $f \in C(A, \mathbb{C})$:

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\pi_1(A)} \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \tag{5.5}$$



Damit ist ein n-dimensionales Integral auf ein 1-dimensionales und ein $(n-1)$-dimensionales Integral zurückgeführt. Durch Iteration kann man damit sukzessiv das n-dimensionale Integral auf n eindimensionale Integrationen zurückführen.

Beispiele 5.3. (a) Sei $A = [a,b] \times [c,d]$ ein **Quader** im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\pi_1(A) = [a,b]$, ${}_xA = [c,d]$ für $x \in \pi_1(A)$, also

$$\int\limits_A f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{5.6}$$

(b) Sei $A = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ eine **abgeschlossene Kreisscheibe**. Dann ist $\pi_1(A) = [-r,r]$, $y_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ für $x \in \pi_1(A)$, also

$$\int_{\overline{B_r(0)}} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{-r}^{r} \Big(\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{5.7}$$

Definition. Die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heiße (**Lebesgue)-integrierbar**, falls die Funktion 1 über A integrierbar ist, d.h. wenn $\mathbb{1}_A$ integrierbar ist.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Ist die Menge A integrierbar, so setzen wir

$$v(A) = v_n(A) := \int_A 1\,d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A\,dx.$$

$v_n(A)$ heißt das n-**dimensionale Volumen** oder das **Lebesgue-Maß** von A. Im Fall $n=2$ nennt man $v_2(A)$ auch den **Flächeninhalt** von A.

Beispiel 5.4. Nach Satz 5.1 ist die konstante Funktion **1** über die kompakte Kreisscheibe $A = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ integrierbar, d.h. $\overline{B_r(0)}$ ist eine integrierbare Menge. Ferner ist nach Beispiel 5.3 (b) ihr Flächeninhalt gegeben durch

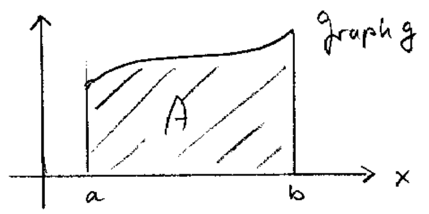
$$\begin{aligned} v_2(\overline{B_r(0)}) &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\, dy \right) dx = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\ &= 4r \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \pi r^2. \end{aligned}$$

Beispiel 5.5. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig. Dann hat

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b],\; 0 \le y \le g(x)\}$$

nach Formel (5.5) den Flächeninhalt

$$v_2(A) = \int_{[a,b]} \left(\int_0^{g(x)} 1\, dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx.$$



5.2 Berechnung von Volumina. Cavalierisches Prinzip

Der Kleine Satz von Fubini liefert insbesondere ein nützliches Rekursionsverfahren zur Berechnung von Volumina. Sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = X \times Y$ eine kompakte Menge. Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichne wieder A_y die Schnittmenge $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in A\}$. Dann gilt offenbar

$$v_n(A) = \int_{\mathbb{R}} v_{n-1}(A_y)\, dy. \tag{5.8}$$

Insbesondere gilt das folgende, nach B. Cavalieri (1598-1647) benannte Prinzip:
Zwei kompakte Mengen A und B in $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ haben das gleiche Volumen, wenn die Schnittmengen A_y und B_y für alle $y \in \mathbb{R}$ das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen haben.

Beispiele 5.6. *Seien $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Kompaktum und $h > 0$.*

(a) *Volumen eines Zylinders.* Die Menge

$$Z = Z(B, h) := B \times [0, h] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

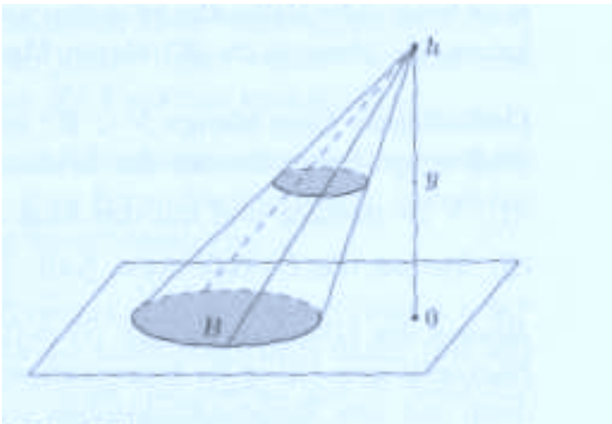
heißt **Zylinder** mit Basis B und Höhe h. Für jedes $h \in [0, h] = \pi_2(Z(B, h))$ ist $Z(B, h)_y = B$, und somit folgt nach (5.8)

$$v_n(Z) = \int_0^h v_{n-1}(B)\, dy = h \cdot v_{n-1}(B).$$

(b) *Volumen eines Kegels.* Die Menge

$$K = K(B, h) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in [0, h] \text{ und } x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$$

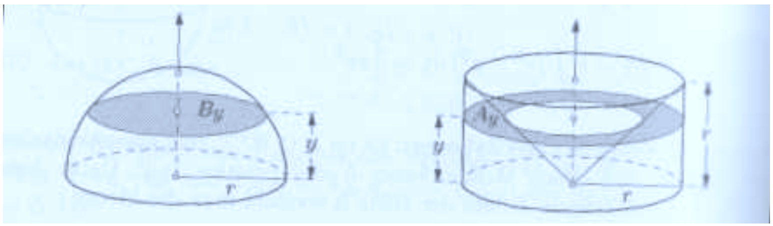
heißt **Kegel** mit Basis B und Höhe h.



Die Schnittmenge $K(B, h)_y$ ist für $h \in [0, h] = \pi_2(K(B, h))$ gegeben durch $K(B, h)_y = (1 - \frac{y}{h})B$. Sie hat nach Aufgabe 4.3 (b) das $(n-1)$-dimensionale Volumen $(1 - \frac{y}{h})^{n-1} \cdot v_{n-1}(B)$. Damit ergibt sich

$$v_n(K) = v_{n-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} dy = \frac{h}{n} \cdot v_{n-1}(B).$$

(c) *Das Kugelvolumen nach Archimedes.* Sei A der dreidimensionale Körper, der entsteht, wenn man aus dem Kreiszylinder Z mit Radius r und Höhe r einen



Kegel ausbohrt, der seine Spitze im Mittelpunkt der Basis von Z hat und dessen Basis die Deckscheibe von Z ist. Sei ferner B die Halbkugel mit dem Radius r.

Der Schnitt A_y in der Höhe y ist ein Kreisring mit der Fläche $\pi(r^2 - y^2)$, der Schnitt B_y ein Kreis mit derselben Fläche (vgl. Beispiel 5.4) . Also ist

$$v(B) = v(A) = v(Z) - v(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Die (3-dimensionale) Kugel vom Radius r hat also das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Unsere Argumentation enthält allerdings noch eine kleine Lücke. Damit A kompakt ist, muss ein offener Kegel K ausgebohrt werden. Gerechnet haben wir aber mit dem Volumen des abgeschlossenen Kegels $\overline{K}$. Nun ist aber $\overline{K} \setminus K = \partial K$ eine Nullmenge (dies folgt z.B. mit Hilfe von Aufgabe 3.2 c), und deshalb gilt, wie wir zeigen werden, dass $v(\overline{K}) = v(K)$. Außerdem müssen wir noch weitere Eigenschaften des Maßes nachweisen, wie z.B. die Additivität bei disjunkten Zerlegungen von Mengen (s. § 8).

6 Lebesguesche Nullfunktionen und Nullmengen

Definition. Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heiße (**Lebesguesche**) **Nullfunktion**, falls $\|f\|_1 = 0$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{N} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \ \|f\|_1 = 0\}$$

die Menge aller Nullfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$.