Übungen 1 zu Analysis III, WS 2022

1.

(a) Ist φ eine Treppenfunktion, dann ist auch $|\varphi|$ eine Treppenfunktion. Gilt die Umkehrung (für reelle Treppenfunktionen)?

(b) Sind φ, ψ reelle Treppenfunktionen, so sind auch $\max(\varphi, \psi)$ und $\min(\varphi, \psi)$ Treppenfunktionen.

(c) Ist φ eine reelle Trepppenfunktion, so sind auch $\varphi^{\pm}$ Treppenfunktionen, wobei
$\varphi^{+}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$; $\varphi^{-}(x) := \varphi^{+}(x) - \varphi(x)$.

2.

Für jede reelle Zahl s sei $f_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f_s(x) := \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x^s, & x \geq 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie diejenigen s, für die eine Hüllreihe Ψ_s zu f_s mit Inhalt $I(\Psi_s) < \infty$ existiert!

3. Für $f : \mathbf{R}^n \to C \cup \{\infty\}$ sei

$$\|f\|_1 = \inf \{I(\Phi) : \Phi \text{ Hüllreihe zu } f\} .$$

Zu $A \subset \mathbf{R}^n$ sei

$$|A|_e = \|1_A\|_1$$

das "äußere Maß" von A (Index e wegen "exterior" (engl.)).

Man zeige:

(a) $A \subset B \Rightarrow |A|_e \leq |B|_e$.

(b) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow |A|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|_e$.

4. $\mathbf{Q}$ seien die rationalen Zahlen. Man zeige $|\mathbf{Q}|_e = 0$.