Übungsblatt 5

Analysis III WS 2022

07.11.2022

1. Es sei B das offene Dreieck der xy-Ebene mit den Ecken (0,0),(1,0),(1,1). Begründen Sie: Die Funktion f auf B, die definiert ist durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{x}$$

ist integrierbar über B. Berechnen Sie $\int\limits_B f(x,y)d(x,y)$.

2. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathfrak{C}[-1,1]$ der auf [-1,1] stetigen Funktionen mit der L^1-Norm unvollständig ist (Wieso ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm?). Zeigen Sie dazu, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

eine L^1-Cauchy-Folge bilden, welche in $\mathfrak{C}[-1,1]$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie einen L^1-Grenzwert im Raum der auf [-1,1] integrierbaren Funktionen.

3. Zeigen Sie, dass das folgende Integral existiert und berechnen Sie es:

$$\int\limits_{K_1(0)} \frac{dx}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}},$$

wobei $K_1(0)$ der offene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ ist.

4. Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int |g_k| dx < \infty$ konvergiert fast überall gegen eine integrierbare Funktion, und es gilt:

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k dx.$$