Übungsblatt 6

Analysis III WS 2022

14.11.2022

1. Es sei $f(x,y) := \frac{sign(x,y)}{x^2+y^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, etwa mit dem Satz über die Integration rotationssymmetrischer Funktionen, dass f nicht über den $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist, aber dass die beiden iterierten Integrale $\int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}} f dx)dy$ und $\int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}} f dy)dx$ existieren und den Wert 0 haben.

2. Zeigen Sie: Der Durchschnitt D abzählbar vieler messbarer Mengen $A_1, A_2, \ldots$ im $\mathbb{R}^n$ ist messbar. Im Fall $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ gilt $v(D) = \lim\limits_{k\to\infty} v(A_k)$.

3.
Es sei $\tilde{f}$ eine Regelfunktion auf $(a;b)$. Dann gilt: $\tilde{f}$ ist genau dann über die Kugelschale $K_{a,b}$ integrierbar, wenn die Funktion $|f(r)|\, r^{n-1}$ über das Intervall $(a;b)$ integrierbar ist; in diesem Fall gilt

$$\boxed{\int\limits_{K_{a,b}} f(\|x\|_2)\, \mathrm{d}^n x = n\,\kappa_n \int\limits_a^b f(r) r^{n-1}\, \mathrm{d}r.}$$

Dabei bezeichnet κ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

4. Es seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^n$ und $a_1, \ldots, a_k$ positive Zahlen. Man beweise: Für eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ existiert

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{\|x-p_1\|^{a_1} \cdots \|x-p_k\|^{a_k}}$$

genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: (i) $a_i < n$ für alle $i = 1, \ldots, k$ sowie (ii) $a_1 + \cdots + a_k > n$.

Sei f eine Funktion auf einem Intervall $I \subset [0;\infty)$. Es seien a, b die Randpunkte von I, und $K_{a,b}$ die Kugelschale $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a < \|x\|_2 < b\}$. Dann definiert

$$x \mapsto f(\|x\|_2) =: \tilde{f}(x)$$

eine rotationssymmetrische Funktion $\tilde{f}$ auf $K_{a,b}$.