

Übungsblatt 9

Analysis III WS 2022

05.12.2022

1. Sei

$$P := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq z \leq 1 \},$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine positive Matrix ist. Berechnen Sie $v_3(P)$!

42. Es sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nicht ausgeartete affine Transformation. Man zeige: Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $v(K) \neq 0$, so ist $T(S)$ der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$.

43. (a) B sei die obere Hälfte der Kugel mit dem Radius R um den Nullpunkt. Berechnen Sie

$$\int_B zd(x, y, z).$$

(b) Der Kreiszyylinder $x^2 + y^2 \leq R^2$ bohrt aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$ einen Körper K aus. Berechnen Sie das Volumen von K .

44. Zeigen Sie: Das folgende Integral existiert genau für $a > 2$ und hat dann den Wert:

$$\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta^2} \frac{d(x, y)}{(x + y)^a} = \frac{1}{a - 2}.$$

Diskutieren Sie allgemein die Integration von Funktionen

$$(x, y) \mapsto x^{p-1}y^{q-1}\varphi(x + y),$$

über die Menge $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta^2$. Hierbei ist φ eine Funktion auf $(1, \infty)$ und $p, q \in \mathbb{R}$.