Anwendungen der Lebesgue-Theorie

Prof. Dr. B. Dreseler

WS 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Grundidee der Fourieranalysis: Entwicklung periodischer Funktionen in trigonometrische Reihen

Bereits im Schulunterricht lernt man heute für gewöhnlich, daß sich der Klang einer schwingenden Saite, welche an beiden Enden eingespannt ist, in den „Grundton“ sowie „Obertöne“ zerlegen läßt. Genauer meint man damit folgendes:
Stellen wir uns vor, daß die Enden der Saite den Punkten 0 und $L > 0$ auf der reellen Achse entsprechen, so ist die Vorstellung die, daß sich die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite zu einem festen Zeitpunkt t als Funktion vom Ort x zerlegen läßt in **stehende Wellen** der Gestalt

$$u_m(x,t) = a_m(t) \sin m\tfrac{\pi}{L}x, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$

d.h. daß man $u(x,t)$ als **Superposition**

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \tfrac{\pi}{L}mx \tag{1.1}$$

darstellen kann. Nehmen wir an, daß die Wellengeschwindigkeit auf 1 normiert ist, so zeigt eine genauere Analyse der zugrundeliegenden „Wellengleichung“ zudem, daß dann $a_m(t)$ die Gestalt $A_m \cos m\frac{\pi}{L}t + B_m \sin m\frac{\pi}{L}t$ besitzen muß, mit gewissen Koeffizienten A_m, B_m (eine ausführliche mathematische Diskussion der schwingenden Saite findet man z.B. in [16]). Der Term mit $m = 1$ entspricht dabei dem **Hauptton** bzw. der **ersten harmonischen Schwingung** der schwingenden Saite, der Term mit $m = 2$ dem **ersten Oberton** bzw. der **zweiten harmonischen Schwingung**, usw..

Insbesondere bedeutet dies, daß man für einen festen Zeitpunkt t die Auslenkungsfunktion $f(x) = u(x,t)$ in eine Sinusreihe der Form $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{\pi}{L} mx$ entwickeln kann.
Beachte, daß man f eindeutig zu einer ungeraden Funktion auf dem Intervall $[-L, L]$ fortsetzen kann, welche dann ebenfalls durch diese Sinusreihe dargestellt wird.
Für allgemeinere Funktionen f auf dem Intervall $[-L, L]$, welche nicht notwendig an den Endpunkten verschwinden, zeigt eine ähnliche Analyse entsprechender physikalischer Randwertprobleme, daß sich diese in Reihen der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \tfrac{\pi}{L} mx + b_m \sin \tfrac{\pi}{L} mx) \tag{1.2}$$

entwickeln lassen sollten.
Die Darstellung (1.1) der Auslenkung der schwingenden Saite war i.w. bereits um 1753 von D. Bernoulli vorgeschlagen worden. L. Euler wie auch viele andere Mathematiker seiner Zeit hatten jedoch erhebliche Zweifel an der Allgemeingültigkeit einer solchen Entwicklung, da sie nicht daran glaubten, daß eine Entwicklung der Gestalt (1.2) für genügend allgemeine Funktionen möglich ist. Diese Skepsis wurde erst durch die Untersuchungen J. Fouriers (um 1807) zur Wärmeleitungsgleichung und nachfolgende Arbeiten anderer, welche nachwiesen, daß (1.2) für erstaunlich viele Funktionen zutrifft, ausgeräumt.

Nun kann man (1.2) auch so interpretieren, daß sich eine genügend allgemeine $2L$-periodische Funktion f auf der reellen Achse in eine Reihe (1.2) entwickeln lassen sollte (die Frage, in welchem Konvergenzsinne dies geschehen könnte, soll an dieser Stelle noch völlig offen gelassen werden).
Zur Erinnerung: Eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt T-**periodisch** $(T > 0)$, falls

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

Indem man mittels einer Dehnung oder Stauchung von f zu der 2π-periodischen Funktion $f \circ \frac{T}{2\pi}(x) := f(\frac{T}{2\pi}x)$ übergeht, kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Periode 2π beträgt. Dies wollen wir im folgenden stets tun, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.
Dann haben wir es in (1.2) mit **trigonometrischen Reihen** der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{1.3}$$

zu tun. Die **Koeffizienten** a_m, b_m einer solchen trigonometrischen Reihe dürfen a priori beliebige komplexe Zahlen sein, und die Reihe sollte zunächst als formale Funktionenreihe betrachtet werden, ohne daß Konvergenz auch nur in einem Punkt x verlangt wird (ganz ähnlich wie für Potenzreihen).

Mittels der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kann die obige Reihe formal auch als sogenannte **Fourierreihe**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{1.4}$$

geschrieben werden. Fourierreihen sollten zunächst ebenfalls zunächst nur als formale Reihen betrachtet werden. Die komplexe Zahl c_k heiße dabei der **k-te Fourierkoeffizient** dieser Reihe. Man beachte auch, daß die Reihenfolge, in welcher darin über alle ganzen Zahlen k summiert wird, ebenfalls noch offen ist.
Stellen (1.2) und (1.3) dieselbe formale Reihe dar, so besteht offenbar der folgende Zusammenhang zwischen den jeweiligen Koeffizienten:

$$a_m = c_m + c_{-m}, \qquad \text{falls } m \geq 0, \tag{1.5}$$
$$b_m = i(c_m - c_{-m}), \quad \text{falls } m \geq 1. \tag{1.6}$$

Aus mathematischer Sicht sind die Reihen (1.3) aufgrund der besonderen Eigenschaften der darin auftretenden sogenannten **Charaktere**

$$e_k(x) := e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

i.a. vorzuziehen. Diese genügen nämlich offenkundig den einfachen Identitäten

$$e_k(x+y) = e_k(x)e_k(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

sowie

$$\overline{e_k} = e_{-k} \tag{1.8}$$

und

$$e_j e_k = e_{j+k}. \tag{1.9}$$

Definition. Die Fourierreihe (1.4) **konvergiere im Punkte** $x \in \mathbb{R}$ gegen $\lambda \in \mathbb{C}$, falls die Folge der symmetrischen Partialsummen $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ für $n \to \infty$ gegen λ strebt. Wir bezeichnen dann λ als den **Wert** der Reihe und schreiben

$$\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (\text{oder auch } \lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}).$$

Sie konvergiere **punktweise (bzw. gleichmäßig)** gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, falls die Folge der symmetrischen Partialsummen $\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f konvergiert. Letzteres bedeutet, daß

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Offenbar ist dann f stetig.

Angenommen, wir wüßten bereits, daß sich eine gegebene $2\pi-$periodische Funktion f in eine Fourierreihe entwickeln läßt. Wie sind dann ihre Fourierkoeffizienten c_k zu bestimmen? Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage liegt in der folgenden Identität für die Charaktere e_k, welche für die gesamte Fourieranalysis von fundamentaler Bedeutung ist:
Falls eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ 2π-periodisch ist, so ist sie bereits eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf ein beliebiges Intervall der Länge 2π, z.B. das Intervall $[0, 2\pi[$. Vorausgesetzt, sie ist über dieses Intervall Riemann-, oder allgemeiner Lebesgue-integrierbar, so definieren wir ihr Integral durch

$$\oint f(x)\, dx := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Beachte, daß der Vorfaktor das Integral so normiert, daß für die konstante Funktion 1 gilt: $\oint 1\, dx = 1$. Man überlegt sich leicht, daß dann für jedes beliebige Intervall I der Länge 2π gilt:

$$\oint f(x)\, dx := \frac{1}{2\pi} \int_I f(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Mit diesem Integralbegriff gilt

Satz 1.1 *Für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\oint e_j(x)\overline{e_k(x)}\, dx = \delta_{jk}, \tag{1.11}$$

wobei δ_{jk} das Kroneckersymbol bezeichne, d.h. $\delta_{jk} = 1$, falls $j = k$, und $\delta_{jk} = 0$, falls $j \neq k$.

Beweis. Für $\ell \neq 0$ ist

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell x} dx = \frac{1}{i\ell} e^{i\ell x}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

und für $\ell = 0$ ist $\int\limits_0^{2\pi} dx = 2\pi$. Daraus ergibt sich die Behauptung sofort mit (1.8) und (1.9).

Q.E.D.

Bemerkung 1.2 Die Formel (1.11) besitzt folgende geometrische Interpretation: Durch $(f, g) := \oint f(x)\overline{g(x)}\, dx$ wird ein Skalarprodukt auf dem Raum der 2π-periodischen, über $[0, 2\pi[$ quadratintegrierbaren Funktionen erklärt. (1.11) besagt dann, daß die Charaktere $\{e_k\}_k$ ein Orthonormalsystem bzgl. dieses Skalarproduktes bilden.

Satz 1.3 *Die Fourierreihe* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ *konvergiere gleichmäßig auf* $\mathbb{R}$ *gegen die (dann stetige) Funktion* f. *Dann ist* f 2π*-periodisch, und es gilt:*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Beweis. Sei $f_n := \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j$. Dann ist f_n 2π-periodisch, und es gilt insbesondere $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $f(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, d.h. f ist 2π-periodisch. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Wegen $|\overline{e_k(x)}| = |e^{-ikx}| = 1,\ x \in \mathbb{R}$, gilt dann

$$\|f\overline{e_k} - \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j \overline{e_k}\|_\infty = \|f - \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j\|_\infty.$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge $(\sum_{j=-n}^{n} c_j e_j \overline{e_k})_n$ gleichmäßig gegen $f\overline{e_k}$, so daß

$$\oint f(x) e_{-k}(x) dx = \lim_{n\to\infty} \oint \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(x) \overline{e_k(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} c_j \oint e_j(x) \overline{e_k(x)}\, dx.$$

Die Behautung folgt daher sofort aus (1.11).

Q.E.D.

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, welche über das Intervall $[0, 2\pi[$ Riemann- bzw. allgemeiner Lebesgue-integrierbar ist, d.h. kurz eine **2π-periodische lokal integrierbare Funktion.** Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt dann

$$\widehat{f}(k) := \oint f(x) \overline{e_k(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

der k-te **Fourierkoeffizient** von f. Die (formale) trigonometrische Reihe

$$Sf(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

heißt die **Fourierreihe** von f. Man benutzt dafür oft auch die folgende symbolische Schreibweise

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{1.12}$$

Die n-te symmetrische Partialsumme bezeichnen wir mit $S_n f(x)$, d.h.

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Schreibt man die Fourierreihe von f gemäß (1.3) als (formale) trigonometrische Reihe der folgenden Form

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{1.13}$$

so ergeben sich aus (1.5), (1.6) und (1.10) rasch die folgenden Formeln für die **Fourier-Cosinuskoeffizienten** a_m bzw. **Fourier-Sinuskoeffizienten** b_m :

$$\begin{aligned} a_m &= 2 \oint f(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; & (1.14) \\ b_m &= 2 \oint f(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \ldots. & (1.15) \end{aligned}$$

Wir haben hier als Integrationsintervall das Intervall $]-\pi, \pi[$ gewählt, da die Entwicklung in trigonometrische Reihen besonders für Funktionen mit Symmetrieeigenschaften bzgl. des Ursprungs vorteilhaft sein kann, d.h. für gerade bzw. ungerade Funktionen.
Ist nämlich f eine *gerade Funktion*, so ist der Integrand in der Formel für b_m ungerade, d.h. $b_m = 0$, so daß die Reihe (1.13) eine reine **Cosinusreihe**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx$$

ist. Analog ist für ungerades f die Reihe (1.13) eine reine **Sinusreihe**

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx.$$

Endliche Linearkombinationen $\sum c_k e_k$ der Charaktere e_k, wie beispielsweise $S_n f$, bezeichnet man übrigens auch als **trigonometrische Polynome**.

Beispiel 1.4 Seien $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$, und sei f diejenige 2π-periodische Funktion, welche auf dem Intervall $[-\pi, \pi[$ mit der Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[a,b[}$ des Intervalls $[a, b[$ übereinstimmt. Oft schreibt man dafür etwas salopp wieder $\mathbf{1}_{[a,b[}$. Dann gilt für den $k-$ten Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b 1 e^{-ikx} \, dx,$$

also

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi}, & \text{falls } \quad k = 0, \\ \frac{i}{2\pi k}(e^{-ibk} - e^{-iak}), & \text{falls } k \neq 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Insbesondere gilt für $0 < a < \pi$

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}(k) = \begin{cases} a/\pi, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{\sin ak}{\pi k}, & \text{falls } k \neq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Im letzten Falle ist $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$, so daß die Fourierreihe hier eine reine Cosinusreihe

$$\mathbf{1}_{[-a,a]}(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin am}{m} \cos mx, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

ist.
Da hier die Funktion f gerade ist, folgt dies auch sofort aus den obigen Bemerkungen und (1.15).

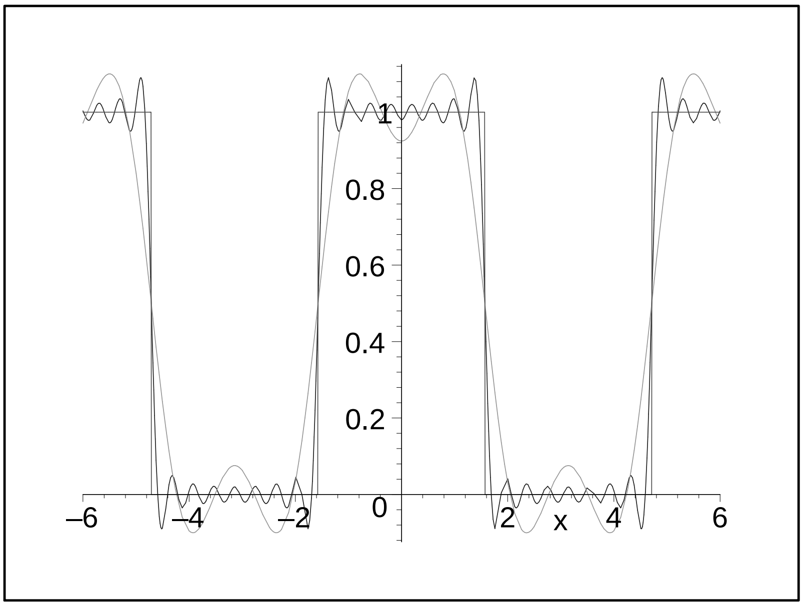


Abbildung 1.1: Graphen von f, $S_3 f$ und $S_{16} f$ für $a = \pi/2$

Bereits im 18. Jahrhundert hatten u.a. Bernoulli, Euler und Lagrange „experimentell“ beobachtet, daß für gewisse einfache Funktionen die (damals natürlich noch nicht so benannte) Fourierreihe von f tatsächlich gegen f konvergiert. Fourier behauptete später, daß dies i.w. immer so sei, was, wie bereits gesagt, eine zeitlang ernsthaft angezweifelt wurde.
Nachdem mehrere Mathematiker (u.a. auch Cauchy) mehr oder weniger falsche „Konvergenzbeweise“ für die Fourierreihenentwicklung geliefert hatten, gelang es

Dirichlet als erstem, einen rigorosen Konvergenzbeweis unter recht allgemeinen Bedingungen an f zu geben. Seitdem hat sich die Frage der Konvergenz Fourierscher Reihen als Quelle für unzählige bedeutende Entwicklungen in der Analysis erwiesen. Ich möchte in diesem einleitenden Kapitel noch nicht auf die Konvergenzfrage eingehen, zumal sich diese technisch leichter im Rahmen der Theorie der Fourierintegrale auf dem $\mathbb{R}^n$ verstehen läßt, welche wir im nachfolgenden Kapitel behandeln werden. Zumindest für lokal quadratintegrierbare 2π-periodische Funktionen f läßt sich jedoch relativ leicht plausibel machen, daß die Fourierreihe in gewissem Sinne gegen f konvergieren sollte:
Wir hatten bereits gesehen, daß die Charaktere $\{e_k\}_k$ ein Orthonormalsystem im Raum L^2 der über $[0, 2\pi[$ quadratintegrierbaren 2π-periodischen Funktionen bilden. Angenommen wir könnten zeigen, daß dieses System vollständig ist, d.h. eine Hilbertraumbasis von L^2 (versehen mit dem Skalarprodukt aus Bemerkung 1.2) bildet. Dies ist nicht sehr schwer nachzuweisen, z.B. mit Hilfe des Approximationssatzes von Stone und Weierstraß. Für einen elementaren Beweis siehe z.B. auch [1]. Dann zeigt die Theorie der Hilberträume, daß die Fourierreihe von f, zumindest im Sinne der Norm auf L^2, d.h. der L^2-Norm $\|f\|_2 := (f, f)^{1/2} = (\oint |f(x)|^2\, dx)^{1/2}$, gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_2 = 0. \tag{1.18}$$

Ferner gilt die "Plancherel-Identität"

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2. \tag{1.19}$$

Wir werden später auf diese Eigenschaften zurückkommen und alternative Beweise geben.

Kapitel 2

Fouriertransformation und Faltung auf dem $\mathbb{R}^n$

2.1 Elementare Eigenschaften der Fouriertransformation

Ähnlich wie für 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ läßt sich auch für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Fouriertransformation definieren.
Es bezeichne D_j den Differentialoperator

$$D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

und

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ bildet der **Charakter** e_ξ, gegeben durch

$$e_\xi(x) := e^{i\xi\cdot x} = \exp[i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

eine simultane Eigenfunktion für alle Differentialoperatoren D^α, denn

$$D^\alpha e_\xi = \xi^\alpha e_\xi. \tag{2.1}$$

Ferner gilt

$$e_\xi(x+y) = e_\xi(x)e_\xi(y), \tag{2.2}$$

d.h. jedes e_ξ ist ein stetiger Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}^n$ in die multiplikative Gruppe $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ aller komplexen Zahlen vom Betrag 1.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichne $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ wie üblich den Lebesgueschen L^p-Raum.

Zur Erinnerung: Eine Lebesgue-meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ liegt in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, falls ihre L^p-Halbnorm $\|f\|_p$ endlich ist. Letztere ist gegeben durch

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

falls $1 \leq p < \infty$, und $\|f\|_\infty$ ist das wesentliche Supremum von $|f|$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, versehen mit der L^p-Norm, bildet einen halbnormierten Vektorraum über $\mathbb{C}$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{N}$ den Unterraum aller Funktionen f, welche im Lebesgueschen Sinne fast überall (kurz: f.ü.) verschwinden, so wird der Quotientenraum $L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$, versehen mit der induzierten L^p-Norm $\|\cdot\|_p$, zu einem Banachraum. Wie üblich werden wir stets Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mit ihren Äquivalenzklassen $[f] := f + \mathcal{N} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, falls nicht ausdrücklich anderes erwähnt wird. Es sei dem Leser überlassen zu prüfen, daß die jeweiligen Definitionen bzw. Aussagen über $\mathcal{L}^p$-Funktionen nicht von der Wahl des Repräsentanten aus $[f]$ abhängen!
Mit $GL(n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Die **Fouriertransformierte** einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = \int f \overline{e}_\xi dx,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, definierte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
Wir definieren für $y \in \mathbb{R}^n$ den **Translationsoperator** λ_y durch

$$(\lambda_y f)(x) := f(x - y), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner setzen wir

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.1 *(a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ stetig.*
(b) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ ist ein stetiger linearer Operator

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

und es gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1 \qquad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(c) Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $(\lambda_y f)^\wedge = e_{-y}\hat{f}$;

(ii) $(e_y f)^\wedge = \lambda_y \hat{f}$;

(iii) $(f \circ A)^\wedge = \frac{1}{|\det A|}\hat{f} \circ {}^t A^{-1}$.

(iv) $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$.

Beweis. (a) folgt aus dem Satz über stetige Abhängigkeit parameterabhängiger Integrale, und (b) ist offensichtlich, da

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)e^{-i\xi\cdot x}|\,dx = \|f\|_1.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_y f)^\wedge(\xi) &= \int f(x-y)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-i\xi\cdot(x+y)}dx \\
&= e^{-i\xi\cdot y}\int f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = e^{-i\xi\cdot y}\hat{f}(\xi), \\
(e_y f)^\wedge(\xi) &= \int f(x)e^{iy\cdot x}e^{-i\xi\cdot x}dx = \hat{f}(\xi - y),
\end{aligned}$$

womit (c)(i), (ii) folgen. Schließlich gilt nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
(f \circ A)^\wedge(\xi) &= \int f(Ax)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-i\xi\cdot(A^{-1}x)}|\det A^{-1}|dx \\
&= \frac{1}{|\det A|}\int f(x)e^{-i({}^tA^{-1}\xi)\cdot x}dx = \frac{1}{|\det A|}\hat{f}({}^tA^{-1}\xi),
\end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f^*}(\xi) &= \int \overline{f(-x)}e^{-i\xi\cdot x}dx = \int \overline{f}(x)e^{i\xi\cdot x}dx \\
&= \left(\int f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx\right)^- = \overline{\hat{f}(\xi)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.2 Die Faltung

Wir wollen im folgenden unter einer meßbaren (bzw. integrierbaren) Funktion stets eine Lebesgue-meßbare (bzw. integrierbare) Funktion verstehen, falls nicht ausdrücklich anderes gesagt wird.

Definition Seien f, g meßbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ so, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\, dy < \infty,$$

so setzen wir

$$f * g(x) := \int f(y)g(x-y)\, dy,$$

und bezeichnen $f*g(x)$ als die **Faltung von** f **mit** g (im Punkte x). Die Substitution $y = x - t$ liefert

$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)\, dt = g * f(x).$$

Insbesondere ist die Faltung kommutativ.
Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \int |f(y)g(x-y)|\, dy &\leq \left(\int |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int |g(x-y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'}, \\ &= \left(\int |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

falls p und p' **konjugierte Exponenten** sind, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $1 < p, p' < \infty$. Insbesondere ist $f * g(x)$ definiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt dann

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{2.3}$$

Dies bleibt offenbar auch gültig, falls $p = 1,\ p' = \infty$ bzw. $p = \infty,\ p' = 1$.

Theorem 2.2 *(i) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f*g(x)$ definiert für fast alle (kurz: f.a.) $x \in \mathbb{R}^n$, und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\, \|g\|_1. \tag{2.4}$$

(ii) Für $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= f * (g * h), \\ (\alpha f + \beta g) * h &= \alpha(f * h) + \beta(g * h), \\ (f * g)^* &= g^* * f^* = f^* * g^*, \\ (\alpha f + \beta g)^* &= \overline{\alpha} f^* + \overline{\beta} g^*, \\ \|f^*\|_1 &= \|f\|_1, \end{aligned}$$

d.h. durch die Faltung wird auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ ein assoziatives, kommutatives Produkt definiert, und durch $f \mapsto f^*$ eine isometrische Involution. Damit besitzt die sogenannte **Gruppenalgebra** $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ *des $\mathbb{R}^n$ also die Struktur einer involutiven, kommutativen Banachalgebra.*

Beweis. (i) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind die Funktionen $(x, y) \mapsto f(y)$ und $(x, y) \mapsto g(x-y)$ meßbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und folglich auch ihr Produkt

$$F(x, y) := f(y)g(x-y).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int \Big(\int |F(x,y)|\, dx \Big) dy &= \int |f(y)| \Big(\int |g(x-y)|\, dx \Big) dy \\ &= \int |f(y)| \int |g(x)|\, dx dy = \|f\|_1 \, \|g\|_1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

so daß nach dem Satz von Tonelli F integrierbar ist. Nach Fubini ist daher die Abbildung $y \mapsto F(x, y) = f(y)g(x-y)$ für fast alle x integrierbar, d.h. $f * g$ existiert fast überall, und die Abbildung $x \mapsto \int F(x, y)\, dy = f * g(x)$ ist integrierbar über den $\mathbb{R}^n$. Ferner gilt nach (2.5) und Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int |f * g(x)|\, dx = \int \Big| \int F(x,y)\, dy \Big| dx \\ &\leq \int \int |F(x,y)|\, dy dx = \|f\|_1 \, \|g\|_1. \end{aligned}$$

(ii) kann mit ähnlichen Argumenten bewiesen werden und sei als Übung überlassen.

Q.E.D.

Die Bedeutung des Faltungsproduktes im Zusammenhang mit der Fouriertransformation wird durch folgenden Satz klar.

Satz 2.3 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\, \hat{g}.$$

Beweis. Es gilt nach Fubini und wegen der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int \Big(\int f(y)g(x-y)\, dy \Big) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \int \int f(y)e^{-i\xi \cdot y} g(x-y)e^{-i\xi \cdot (x-y)} dy dx \\ &= \int f(y)e^{-i\xi \cdot y} \Big(\int g(x-y)e^{-i\xi \cdot (x-y)} dx \Big)\, dy \\ &= \int f(y)e^{-i\xi \cdot y} \Big(\int g(x)e^{-i\xi \cdot x} dx \Big)\, dy \\ &= \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Der folgende Satz zeigt, daß sich beim Falten die Glattheitseigenschaft eines der beiden Faktoren auf das gesamte Produkt vererbt. Wir benötigen noch ein wenig Notation.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U_x von x in Ω, auf der f integrierbar ist. Offenbar ist dies äquivalent dazu, daß f über jede kompakte Teilmenge von Ω integrierbar ist. Beachte, daß nach der Hölderschen Ungleichung

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega), \tag{2.6}$$

für $1 \leq p \leq \infty$.

Ferner bezeichnen wir für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $C_0^k(\Omega)$ den Raum aller $k-$mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit kompaktem Täger.

Bemerkung 2.4 Die Räume $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ sind nicht-trivial. Z.B. liegt die Funktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

deren Träger die abgeschlossene Einheitskugel $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_1}(0)$ ist, in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sollte dies noch nicht bekannt sein, so sei der Beweis als Übung überlassen.

Satz 2.5 *Seien* $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *(*$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*).*
(i) Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, *und es gilt*

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g, \quad |\alpha| \leq k. \tag{2.7}$$

(ii) Ist A *eine abgeschlossene Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$ *derart, daß* f *außerhalb von* A *f.ü. verschwindet, so gilt*

$$\operatorname{supp} f * g \subset A + \operatorname{supp} g.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g,$$

falls auch f *in* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *liegt.*

Beweis. (i) Wir dürfen o.B.d.A. $k \in \mathbb{N}$ voraussetzen. Sei $K = \operatorname{supp} g$ der kompakte Träger von g, und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $x \in B_\varepsilon(x_0) =: B$. Dann ist $g(x-y) = 0$, es sei denn, $x - y \in K$, d.h. $y \in x - K \subset B - K$. Somit gilt

$$f * g(x) = \int\limits_{B-K} f(y) g(x-y)\, dy.$$

Ist nun zunächst $k = 0$, so ist $\|g\|_\infty < \infty$, und

$$|f(y)g(x-y)| \leq \|g\|_\infty (\mathbf{1}_{B-K}|f|)(y)$$

für alle $x \in B$. Die rechte Seite bildet also eine von x unabhängige integrierbare Majorante des Integranden $f(y)g(x-y)$, welcher für jedes feste y stetig in x ist. Nach dem Satz über stetige Abhängigkeit parameterabhängiger Integrale ist somit $f * g$ stetig im Punkt x_0. Damit ist $f * g$ stetig.
Ganz ähnlich erhält man die Aussage des Satzes sowie Formel (2.7) per Induktion nach k, indem man den Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale anwendet.
(ii) Sei $f*g(x) \neq 0$. Dann gibt es mindestens ein $y \in A$ mit $f(y)g(x-y) \neq 0$ (wieso?). Für dieses gilt dann $x - y \in \operatorname{supp} g$, und somit $x \in y + \operatorname{supp} g \subset A + \operatorname{supp} g$. Die Behauptung folgt, da $A + \operatorname{supp} g$ abgeschlossen ist.

Q.E.D.

2.3 Approximierende Einsen und Regularisierung von Funktionen in L^p

Wir wollen nun zeigen, wie man mittels Faltung eine gegebene Funktion „glätten" kann, d.h. beliebig genau durch C^∞-Funktionen approximieren kann. Dies soll insbesondere bzgl. der L^p-Normen untersucht werden. Dazu benötigen wir noch einige Hilfsmittel aus der Theorie der L^p-Räume.

Zur Erinnerung: Unter einer **Treppenfunktion** versteht man eine endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von Quadern, d.h. eine Funktion der Gestalt $\sum a_j \mathbf{1}_{Q_j}$, mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$ und Quadern $Q_j \subset \mathbb{R}^n$. Dabei sei ein Quader Q per definitionem das direkte Produkt $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ beschränkter Intervalle $I_1, \ldots, I_n$.

Lemma 2.6 (Stetigkeit der Translation in L^p) *Sei $1 \leq p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\|\lambda_y f\|_p = \|f\|_p \tag{2.8}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$, sowie

$$\lim_{y \to 0} \|\lambda_y f - f\|_p = 0. \tag{2.9}$$

Beweis. Die Identität $\|\lambda_y f\|_p = \|f\|_p$ folgt aus der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes.
Um die Stetigkeit der Translation zu beweisen, nutzen wir aus, daß für $1 \leq p < \infty$ der Raum $\mathcal{T}$ aller Treppenfunktionen dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Für $p = 1$ ist dies klar aufgrund der üblichen Definition von $L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $1 < p < \infty$ sei dies als Übung überlassen.
Für die Indikatorfunktion eines Quaders ist (2.9) aber klar, und damit auch für jede Treppenfunktion. Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig, und sei $\varepsilon > 0$. Wähle dann eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/4$. Zu φ wähle ein $\delta > 0$ so, daß $\|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p < \varepsilon/2$ für alle y mit $|y| < \delta$. Für solche y gilt dann

$$\begin{aligned} \|\lambda_y f - f\|_p &= \|\lambda_y(f - \varphi) + \lambda_y\varphi - \varphi + \varphi - f\|_p \\ &\leq \|\lambda_y(f - \varphi)\|_p + \|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p + \|f - \varphi\|_p \\ &= 2\|f - \varphi\|_p + \|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall eines allgemeineren Ergebnisses aus der Funktionalanalysis. Wir geben hier einen direkten Beweis.

Lemma 2.7 („Dualisierungsprinzip") *Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei p' der zu p konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/p' = 1$. Dann gilt für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n): \|g\|_{p'} = 1} \left| \int f(x)g(x)\, dx \right|. \tag{2.10}$$

Beweis. Sei $S^{p'} := \{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{p'} = 1\}$. Für $g \in S^{p'}$ gilt wegen der Hölderschen Ungleichung

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} = \|f\|_p,$$

so daß $\|f\|_p$ die rechte Seite von (2.10) majorisiert.
Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, sei o.B.d.A. $f \neq 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Betrachten wir f als einen Repräsentanten in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, so setzen wir, falls $p < \infty$,

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) = 0, \\ \frac{f(x)}{|f(x)|}|f(x)|^{p-1}, & \text{falls } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist g meßbar, und es gilt wegen $p' = p/(p-1)$:

$$\int |g(x)|^{p'} dx = \int |f(x)|^p dx.$$

Nehmen wir o.B.d.A. an, daß $\|f\|_p = 1$ ist, so ist also $g \in S^{p'}$, und es gilt

$$\int f(x)g(x)dx = \int |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p = 1,$$

d.h. $\|f\|_p$ ist durch die rechte Seite von (2.10) beschränkt.
Somit gilt (2.10) für $1 \leq p < \infty$.
Sei nun $p = \infty$, und sei o.B.d.A. $\|f\|_\infty > 0$. Ist $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, so gibt es eine meßbare Menge positiven Maßes $A \subset \mathbb{R}^n$ so, daß $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ für alle $x \in A$.
Setze dann

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{|A|} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & , \text{ falls } x \in A, \\ 0 & , \text{ falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|g\|_1 = 1$, und

$$\int fg\, dx = \frac{1}{|A|} \int\limits_A |f(x)| dx \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Damit folgt (2.10) auch für $p = \infty$.

Q.E.D.

Bemerkungen 2.8 (a) In (2.10) kann man die Bedingung $\|g\|_{p'} = 1$ offenbar auch ersetzen durch $\|g\|_{p'} \leq 1$. Dies stellt sich gelegentlich als hilfreich heraus.
(b) Ist f meßbar, und gilt

$$\sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int |f(x)g(x)|\, dx < \infty,$$

wobei hier das Supremum über alle meßbaren beschränkten Funktionen g mit beschränktem Träger und $\|g\|_{p'} \leq 1$ gebildet werde, so folgert man ähnlich, daß dann bereits f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Man ersetze dazu die Funktion g aus dem vorangehenden Beweis durch $g_N := \frac{\widetilde{g_N}}{\|\widetilde{g_N}\|_{p'}}$, mit

$$\widetilde{g_N}(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } |x| \leq N \text{ und } |g(x)| \leq N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und lasse N gegen Unendlich streben. Die Behauptung folgt dann mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Satz 2.9 (Minkowskische Integralungleichung) *Seien $X := \mathbb{R}^m, Y := \mathbb{R}^n$, und sei $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ meßbar. Ferner sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist auch die Abbildung $Y \ni y \mapsto \|F(\cdot, y)\|_p$ meßbar.*
Ist nun $\int\limits_Y \|F(\cdot, y)\|_p\, dy < \infty$, so ist für f.a. $x \in X$ die Funktion $y \mapsto F(x, y)$ integrierbar über Y. Ferner ist die Funktion $X \ni x \mapsto \int\limits_Y F(x, y)\, dy$ meßbar, und es gilt

$$\Big\| \int\limits_Y F(\cdot, y) dy \Big\|_p \leq \int\limits_Y \|F(\cdot, y)\|_p\, dy. \tag{2.11}$$

Beweis. Denkt man sich das Integral $\int F(\cdot,y)\,dy$ durch Riemannsummen approximiert, so ist (2.11) aufgrund der Dreiecksungleichung für Summen plausibel.

In der Tat kann man F als eine Funktion f von $L^1(Y)$ mit Werten im Banachraum $L^p(X)$ auffassen, indem man setzt $f(y)(x) := F(x,y)$. Das Integral $\int\limits_Y F(\cdot,y)\,dy$ läßt sich dann als vektorwertiges „Bochner-Integral" $\int\limits_Y f(y)dy$, mit Werten im Banachraum $L^p(X)$, interpretieren, und (2.11) ist nichts anderes als die Dreiecksgleichung für Banachraum-wertige Integrale.

Für einen elementareren Beweis verwenden wir das Dualisierungsprinzip. Wir betrachten erneut nur den Fall $1 \le p < \infty$ und überlassen den Fall $p = \infty$ als Übung. Zunächst ist nach dem Satz von Tonelli die Abbildung $y \mapsto \int |F(x,y)|^p dx$ und damit auch $y \mapsto \|F(\cdot,y)\|_p$ meßbar, da $(x,y) \mapsto |F(x,y)|^p$ meßbar ist. Ist nun $\int \|F(\cdot,y)\|_p\,dy < \infty$, so sei $g \in S^{p'} := \{\varphi \in L^{p'}(X) : \|\varphi\|_{p'} = 1\}$. Dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_Y \int\limits_X |F(x,y)|\;|g(x)|\,dxdy &= \int\limits_Y \Big(\int\limits_X |g(x)||F(x,y)|dx\Big)dy \\ &\le \int\limits_Y \|g\|_{p'}\|F(\cdot,y)\|_p\,dy = \int\limits_Y \|F(\cdot,y)\|_p\,dy < \infty.\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $(x,y) \mapsto g(x)F(x,y)$ integrierbar, und nach Fubini folgt ganz analog

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_X \Big(\int\limits_Y F(x,y)\,dy\Big)\,g(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_Y \Big(\int\limits_X g(x)F(x,y)\,dx\Big)\,dy\right| \\ &\le \int\limits_Y \int\limits_X |g(x)|\;|F(x,y)|dxdy \le \int\limits_Y \|F(\cdot,y)\|_p\,dy.\end{aligned}$$

Die Ungleichung (2.11) folgt nun mittels (2.10) und Bemerkung 2.8.

Q.E.D.

Korollar 2.10 (Youngsche Ungleichung) *Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Dann ist $g * f$ f.ü. definiert und liegt in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt*

$$\|g * f\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p. \tag{2.12}$$

Beweis. Wende die Minkowskische Integralungleichung auf die Funktion $F(x,y) := g(y)f(x-y)$ an und benutze (2.8).

Q.E.D.

Bemerkung 2.11 Lemma 2.7 und Satz 2.9 gelten analog auch für beliebige σ-endliche Maßräume $(X, d\mu)$ und $(Y, d\nu)$, bei fast wortgleichen Beweisen.

Definition. Unter einer **approximierenden Eins** verstehen wir eine Familie $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ integrierbarer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften: Es gebe ein $C \geq 0$ so, daß gilt

(i)
$$\int \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1 \qquad \text{für alle } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(ii)
$$\int |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx \leq C \qquad \text{für alle } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(iii)
$$\text{für jedes } \delta > 0 \text{ ist} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\delta} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = 0.$$

.

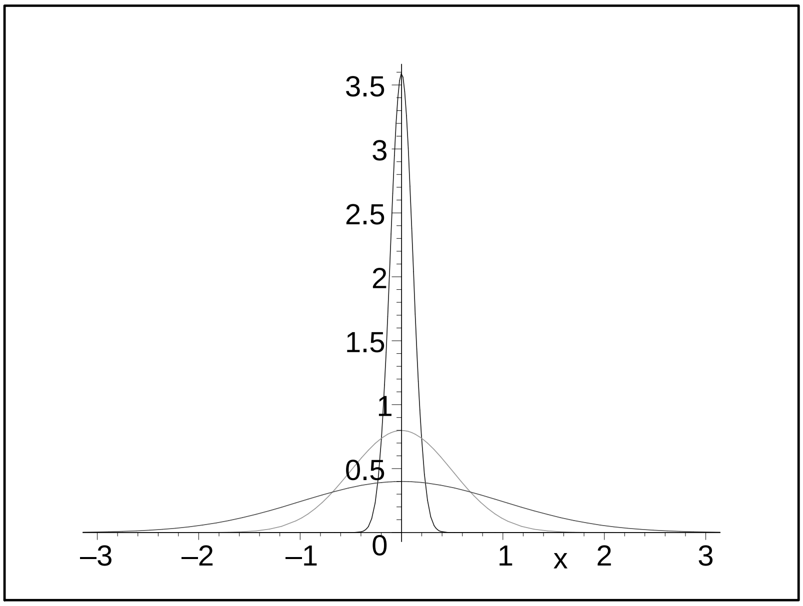


Abbildung 2.1: Dirac-Folge

Beispiel 2.12 *Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \varphi(x)\, dx = 1$, und setze*

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon > 0.$$

Dann ist $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine approximierende Eins, denn:

(i) folgt sofort aus der Transformationsformel. Ebenso ist

$$\int |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = \varepsilon^{-n} \int \left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx = \int |\varphi(x)| dx$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. es gilt auch (ii). Und ist $\delta > 0$, so ist ganz analog

$$\int\limits_{|x|>\delta} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = \int\limits_{|y|>\delta/\varepsilon} |\varphi(y)|\, dy,$$

so daß (iii) aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt.
Ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so bezeichnet man die so konstruierte approximierende Eins oft auch als **Dirac-Familie** (und für jede fallende Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$ die Folge $\{\varphi_j\}_j := \{\varphi_{\varepsilon_j}\}_j$ als **Dirac-Folge**).

Theorem 2.13 *Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ eine approximierende Eins.*

(a) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$, so gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig in den Punkten einer Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe zu jedem $\kappa > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß $|f(x) - f(z)| \leq \kappa$ für alle $x \in V$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - z| \leq \delta$. Dann konvergiert $f * \varphi_\varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$ auf V gleichmäßig gegen f.

Beweis. (a) Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, und sei $\kappa > 0$. Wähle gemäß (2.9) ein $\delta > 0$ so, daß

$$\|\lambda_y f - f\|_p < \kappa \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| < \delta, \tag{2.13}$$

und beobachte, daß wegen der Eigenschaft (i) einer approximierenden Eins

$$(f * \varphi_\varepsilon - f)(x) = \int \varphi_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\, dy.$$

Mit der Minkowskischen Integralungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p &\leq \int |\varphi_\varepsilon(y)|\, \|\lambda_y f - f\|_p\, dy \\ &= I + II, \end{aligned}$$

mit

$$I := \int\limits_{|y|<\delta} |\varphi_\varepsilon(y)|\, \|\lambda_y f - f\|_p\, dy,$$

$$II := \int_{|y|>\delta} |\varphi_\varepsilon(y)| \, \|\lambda_y f - f\|_p \, dy.$$

Wegen (2.13) und der Eigenschaft (ii) einer approximierenden Eins gilt nun für jedes $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$I \leq \int_{|y|<\delta} |\varphi_\varepsilon(y)| \kappa \, dy \leq \kappa \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(y)| dy \leq C\kappa.$$

Ferner ist

$$II \leq \int_{|y|>\delta} |\varphi_\varepsilon(y)| \, 2\|f\|_p \, dy.$$

Aufgrund der Eigenschaft (iii) einer approximierenden Eins gibt es daher ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß $II < \kappa$ ist für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Für solche ε folgt also insgesamt $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \leq (C+1)\kappa$.
(b) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig in den Punkten aus V, und sei $\kappa > 0$. Dann gibt es per definitionem ein $\delta > 0$ so, daß folgendes Analogon zu (2.13) gilt:

$$\|\lambda_y f - f\|_{\infty,V} < \kappa \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| < \delta.$$

Hier bezeichne $\|g\|_{\infty,V} := \sup_{x \in V} |g(x)|$.
Die Argumente aus Teil (a) übertragen sich nun direkt, wenn man die L^p-Norm $\|\cdot\|_p$ durch $\|\cdot\|_{\infty,V}$ ersetzt.

Q.E.D.

Korollar 2.14 *Der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und sei $f_N := \mathbf{1}_{B_N(0)} f$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann $f = \lim_{N \to \infty} f_N$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß $\|f - f_N\|_p < \varepsilon/2$. Sei ferner $\{\varphi_j\}_j$ eine Dirac-Folge. Nach Theorem 2.13 gibt es ein j so, daß $\|f_N - f_N * \varphi_j\|_p < \varepsilon/2$. Somit ist $\|f - f_N * \varphi_j\|_p < \varepsilon$. Ferner ist nach Satz 2.5 $f_N * \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

2.4 Glatte Teilungen der Eins

Wir beweisen hier noch ein Ergebnis, welches später benötigt werden wird.

Lemma 2.15 *Sei K eine kompakte Teilmenge der offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ so, daß $0 \leq \psi \leq 1$ und $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K.*

Beweis. Wähle $0 < \varepsilon < \delta < \varepsilon + \delta < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$, und setze $f := \mathbf{1}_{K_\delta}$, wobei K_δ die δ**-Aufdickung** $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\} = K + \overline{B}_\delta(0)$ der Menge K bezeichne. Ferner sei $\{\varphi_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ eine Dirac-Familie nicht-negativer Funktionen mit $\operatorname{supp} \varphi_{\varepsilon'} \subset \overline{B}_{\varepsilon'}(0)$. Dann ist nach Satz 2.5 $\tilde{\psi} := f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und $\operatorname{supp} \tilde{\psi} \subset K_\delta + \overline{B}_\varepsilon(0) = K_{\delta+\varepsilon} \subset \Omega$. Nun ist für $x \in K_{\delta-\varepsilon}$ und $y \in \overline{B}_\varepsilon(0)$ offenbar $x - y \in K_\delta$, also $f(x-y) = 1$, und somit

$$\tilde{\psi}(x) = \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy = \int \varphi_\varepsilon(y) dy = 1,$$

d.h. $\tilde{\psi} \equiv 1$ auf der Umgebung $K_{\delta-\varepsilon}$ von K. Die Funktion $\psi := \tilde{\psi}|_\Omega$ besitzt folglich die gewünschten Eigenschaften.

Q.E.D.

Bemerkung 2.16 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und ist $\varphi \subset C_0^k(\Omega)$, so liegt die **triviale Fortsetzung**

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

offenbar in $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Umgekehrt liegt für jedes $\psi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega$ die Einschränkung $\psi|_\Omega$ in $C_0^k(\Omega)$, und es ist $\widetilde{\psi|_\Omega} = \psi$. Wir werden daher im folgenden oft ψ und $\psi|_\Omega$ identifizieren, d.h. den Raum $C_0^k(\Omega)$ mit dem Teilraum $\{\psi \in C_0^k(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \psi \subset \Omega\}$ von $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ identifizieren.

MitA^0 bezeichnen wir wie üblich das Innere einer Teilmenge A eines topologischen Raumes.

Lemma 2.17 (Existenz glatter Teilungen der Eins) *Seien $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sowie K ein Kompaktum mit $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$.*

(a) Dann existieren Kompakta $K_j \subset \Omega_j$ so, daß $K \subset \bigcup_{j=1}^k K_j$. Es darf ferner angenommen werden, daß $K_j = \overline{K_j^0}$.

(b) Es existieren Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ so, daß $\varphi_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^k \varphi_j \leq 1$ und $\sum_{j=1}^k \varphi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von K.

Beweis. (a) Für $\varepsilon > 0$ bezeichne Ω_j^ε die ε**-Verjüngung** $\Omega_j^\varepsilon := \{x \in \Omega_j : \operatorname{dist}(x, \Omega_j^c) > \varepsilon\}$ von Ω. Dann ist Ω_j^ε offen und $\overline{\Omega_j^\varepsilon} \subset \Omega_j$. Wir zeigen, daß für genügend kleines $\varepsilon > 0$ die Inklusion $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j^\varepsilon$ gilt. Wählen wir dann zusätzlich $\varepsilon > 0$ so klein, daß $K_\varepsilon = K + \overline{B}_\varepsilon(0) \subset \bigcup \Omega_j$, so folgt daraus (a), mit $K_j := \overline{(K_\varepsilon)^0 \cap \Omega_j^\varepsilon}$.

Nehmen wir nämlich an, daß die Inklusion für kein $\varepsilon > 0$ gilt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j^\varepsilon$. Da K kompakt ist, besitzen die x_ε, $\varepsilon > 0$, einen Häufungspunkt $x \in K$, für $\varepsilon \to 0$. Aber dann ist $x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.
(b) Zu den Kompakta $K_j \subset \Omega_j$ aus (a) wählen wir gemäß Lemma 2.15 Funktionen $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ so, daß $0 \leq \psi_j \leq 1$ und $\psi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung U_j von K_j.
Dann gilt offenbar $(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) \equiv 0$ auf der Umgebung $U := \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ von K, d.h. $1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) \equiv 1$ auf U. Setzen wir

$$\varphi_1 := 1-(1-\psi_1) = \psi_1, \quad \varphi_2 := (1-\psi_1)-(1-\psi_1)(1-\psi_2) = \psi_2(1-\psi_1),$$

und allgemeiner für $j = 2, \ldots, k$

$$\varphi_j := (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1}) - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_j) = \psi_j(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1}),$$

so erhalten wir durch Summation einer teleskopischen Reihe sofort

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k).$$

Insbesondere ist $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) = 1$ für $x \in U$. Ferner liegt offenbar φ_j in $C_0^\infty(\Omega_j)$, und sicherlich ist $\varphi_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \leq 1$.

Q.E.D.

2.5 Rasch fallende Funktionen und das Riemann-Lebesgue-Lemma

Satz 2.18 *Sei* $1 \leq j \leq n$.
(a) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *stetig differenzierbar so, daß* $D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *und verschwindet* f *im Unendlichen, so gilt*

$$\widehat{D_j f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi).$$

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *so, daß die Funktion* $x_j f : x \mapsto x_j f(x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *liegt. Dann ist* $\hat{f}$ *partiell nach* ξ_j *differenzierbar, und es gilt*

$$D_j \hat{f}(\xi) = -(x_j f)^\wedge(\xi).$$

Beweis. (a) Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\widehat{D_j f}(\xi) &= \frac{1}{i}\int \partial_{x_j} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = -\frac{1}{i}\int f(x)\partial_{x_j}(e^{-i\xi\cdot x})\, dx \\ &= -\frac{1}{i}(-i\xi_j)\int f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = \xi_j \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(b) Folgt ähnlich sofort aus dem Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale und dem Satz von Fubini.

Q.E.D.

Dieser Satz legt nahe, folgenden Funktionenraum einzuführen.

Definition. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bestehe aus allen Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, daß $x^\alpha D^\beta \varphi$ beschränkt ist für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Derartige Funktionen wollen wir auch als **Schwartzfunktionen** bezeichnen. Oftmals werden wir den Schwartzraum auch kürzer mit $\mathcal{S}$ bezeichnen.

Bemerkung 2.19 Mittels der Leibnizformel kann man zeigen, daß eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Schwartzfunktion ist dann und nur dann, wenn

$$D^\alpha(x^\beta \varphi) \text{ beschränkt ist für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Dies sei als Übung überlassen.

Offenbar bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, und es ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für jede „Schwartzfunktion“ $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch

$$(1 + |\cdot|^2)^\ell D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}, \quad \text{für alle } \ \ell \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

d.h. es gilt insbesondere

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_\ell (1 + |x|^2)^{-\ell} \quad \text{für alle } \ \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht also aus denjenigen C^∞-Funktionen, welche zusammen mit jeder ihrer Ableitungen von beliebiger negativer Ordnung $O(|x|^{-N})$ im Unendlichen verschwindet. Man nennt Schwartzfunktionen daher auch „rasch fallende Funktionen“. Da für $\ell > n/2$ die rechte Seite von (2.14) in jedem Raum $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist ferner für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$

$$D^\alpha \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ p \in [1, \infty].$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.15}$$

Aus Satz 2.18 gewinnt man leicht per Induktion nach den Ordnungen $|\alpha|$ und $|\beta|$ von α und β sowie der Leibnizregel folgendes

Korollar 2.20 *Die Fouriertransformation läßt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ invariant, d.h. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-1)^{|\beta|}\mathcal{F}(D_x^\alpha(x^\beta\varphi))(\xi)\,. \tag{2.16}$$

Bemerkung 2.21 Eine für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen fundamentale Konsequenz ist die folgende:
Ist $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein „linearer Differentialoperator" mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man das Polynom $P(\xi) := \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha,\ \xi \in \mathbb{R}^n$, als sein **(vollständiges) Symbol**.
Beispielsweise ist das Symbol des **Laplace-Operators**

$$\Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

gegeben durch $P(\xi) = -|\xi|^2$.
Nach (2.16) gilt

$$(P(D)\varphi)^\wedge(\xi) = P(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.17}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Unter der Fouriertransformation geht also der Differentialoperator $P(D)$ über in den **Multiplikationsoperator**

$$M_P : \varphi \mapsto P\varphi,\ \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei P das Symbol von $P(D)$ ist.

Als Folge von Korollar 2.20 erhalten wir

Theorem 2.22 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion ist stetig und verschwindet im Unendlichen.*

Beweis. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ ist, liegt nach Korollar 2.14 der Raum $\mathcal{S}$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Zu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es daher eine Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{S}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_1 = 0$. Nach Satz 2.1 (b) ist insbesondere $\lim\limits_{j\to\infty} \|\hat{f} - \hat{\varphi}_j\|_\infty = 0$, d.h. $\{\hat{\varphi}_j\}_j$ konvergiert gleichmäßig gegen $\hat{f}$. Da $\hat{\varphi}_j \in \mathcal{S} \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, ist folglich auch $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Man beachte, daß der Beweis gleichzeitig die Stetigkeit der Fouriertransformierten, welche wir früher schon auf andere Art und Weise hergeleitet hatten, mitliefert.
Mit Satz 2.1, Satz 2.3 und Theorem 2.22 ergibt sich folgendes

Korollar 2.23 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein stetiger, linearer Homomorphismus der involutiven Banachalgebra $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ in die involutive Banachalgebra $(C_\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \overline{}; \|\cdot\|_\infty)$.*

Mittels der Fourierumkehrformel, welche wir als nächstes beweisen werden, und der Tatsache, daß $\mathcal{S}$ dicht in C_∞ liegt, folgt zudem, daß die sogenannte **Fourieralgebra**

$$A(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$$

dicht in $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt.

2.6 Umkehrung der Fouriertransformation

Lemma 2.24 *Es bezeichne Φ_n auf $\mathbb{R}^n$ die* **Gaußfunktion**

$$\Phi_n(x) := e^{-|x|^2/2}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann liegt Φ_n in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{n/2}\Phi_n. \tag{2.18}$$

Insbesondere ist

$$1 = \Phi_n(0) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}_n(\xi)\, d\xi. \tag{2.19}$$

Beweis. Da $|\cdot|^{2N} e^{-|\cdot|^2/2}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, folgt leicht, daß $\Phi_n \in \mathcal{S}_n$ ist.
Sei nun zunächst $n = 1$. $y = \Phi_1$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y' + xy = 0. \tag{2.20}$$

Nach (2.16) gilt ferner

$$(\hat{\Phi}_1)' = iD\hat{\Phi}_1 = -i\widehat{(x\Phi_1)},$$

also mit (2.20)

$$(\hat{\Phi}_1)' = -i\widehat{(-\Phi_1')} = \widehat{(-D\Phi_1)} = -\xi\hat{\Phi}_1.$$

Somit erfüllt auch $\hat{\Phi}_1$ die Differentialgleichung (2.20), und folglich ist $(\hat{\Phi}_1/\Phi_1)' \equiv 0$, d.h. $\hat{\Phi}_1/\Phi_1$ ist konstant.
Nun ist aber $\Phi_1(0) = 1$, und

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \left(\int \int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr d\theta \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Somit folgt $\hat{\Phi}_1/\Phi_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{1} = (2\pi)^{1/2}$, also

$$\hat{\Phi}_1 = (2\pi)^{1/2}\Phi_1.$$

Ist n beliebig, so gilt wegen $\Phi_n(x) = \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_1(x_n)$ und Fubinis Theorem offenbar $\hat{\Phi}_n(\xi) = \hat{\Phi}_1(\xi_1)\cdots\hat{\Phi}_1(\xi_n)$. Damit folgt sofort (2.18), und dann auch (2.19), da

$$\begin{aligned}\Phi_n(0) &= (2\pi)^{-n/2}\hat{\Phi}_n(0) = (2\pi)^{-n/2}\int \Phi_n(x)\,dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{\Phi}_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Einen alternativen Beweis kann man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel führen (Übung).

Satz 2.25 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int f\hat{g}\,dx = \int \hat{f}g\;dx. \tag{2.21}$$

Beweis. Nach Fubini ist

$$\begin{aligned}\int f\hat{g}\,dx &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dy\right)dx \\ &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dx\right)dy = \int \hat{f}(y)g(y)dy.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Theorem 2.26 (Fourier-Umkehrformel) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \tag{2.22}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei Φ_n die Gaußfunktion aus Lemma 2.24, für die wir bereits die Umkehrformel kennen, und setze $\varphi := (2\pi)^{-n}\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{-n/2}\Phi_n$. Dann ist $\int\varphi\,dx = 1$, und wir betrachten die approximierende Eins $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon > 0$ (vergl. Bemerkung 2.4).

Der Grundgedanke des Beweises wird darin bestehen, f durch „Superpositionen“ von Translaten skalierter Gaußfunktionen, für welche die Fourierumkehrformel i.w. in Lemma 2.26 bewiesen wurde, zu approximieren. Nach Theorem 2.13 gilt nämlich

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 = 0, \tag{2.23}$$

wobei $f * \varphi_\varepsilon = \int f(y)\lambda_y\varphi_\varepsilon \, dy$.
Ferner ist nach Satz 2.1 $\varphi_\varepsilon = (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}$, folglich nach Satz 2.25, da Φ_n symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) &= \int f(x-y)\ (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int f(x+y)\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int (\lambda_{-x}f)^\wedge(\xi)\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist $\hat{f}$ integrierbar, Φ_n ist beschränkt und $\Phi_n(\varepsilon\xi)$ strebt für $\varepsilon \to 0$ punktweise gegen $\Phi_n(0)$. Daher folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \varphi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Andererseits folgt aus (2.23), daß für eine Folge $\varepsilon_j \searrow 0$ gilt: $f(x) = \lim_{j\to\infty} f * \varphi_{\varepsilon_j}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ergibt sich (2.22).

Q.E.D.

Die Fourierumkehrformel besitzt z.B. für $n = 1$ folgende *physikalische Interpretation*: Sei $f(t)$ ein von der Zeit t abhängiges Signal, welches den Voraussetzungen von Theorem 2.26 genügt. Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau)e^{i\tau t} dt,$$

d.h. f läßt sich in „Eigenschwingungen“ $e^{i\tau t} = \cos(\tau t) + i\sin(\tau t)$ der „Frequenzen“ $\tau \in \mathbb{R}$ zerlegen, wobei $\hat{f}(\tau)$ die „Amplitude“ oder „Dichteverteilung“ der Frequenzen darstellt.

Korollar 2.27 (Eindeutigkeitssatz) *Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und ist $\hat{f} = \hat{g}$, so ist $f = g$.*

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $h := f - g \in \mathcal{L}^1$, $\hat{h} = 0 \in \mathcal{L}^1$, und somit $h(x) = 0$ f.ü. nach Theorem 2.26. Es folgt $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Definition. Wir definieren die **Fourier-Kotransformierte** $\overline{\mathcal{F}}f$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) := \int f(x)e^{i\xi\cdot x}\,dx = \hat{f}(-\xi).$$

Ferner setzen wir für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\check{f}(x) := f(-x), \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $f \in \mathcal{S}$ liegt auch $\check{f}$ in $\mathcal{S}$. Beachte auch, daß für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(\overline{\mathcal{F}}f)^\vee = \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(\check{f}) = \overline{\mathcal{F}}f, \tag{2.24}$$

$$(f * g)^\vee = \check{g} * \check{f} = \check{f} * \check{g}. \tag{2.25}$$

Als weitere Folge erhalten wir

Theorem 2.28 *(a) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Isomorphismus, mit Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.*
(b) Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so sind auch $\varphi\psi$ und $\varphi * \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\;\hat{\psi}, \quad (\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \tag{2.26}$$

Beweis. (a) Mit $\varphi \in \mathcal{S}$ sind nach Korollar 2.20 auch $\mathcal{F}\varphi$ und $\overline{\mathcal{F}}\varphi$ in $\mathcal{S}$. Somit gilt nach der Fourierumkehrformel (2.22) $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und da φ stetig ist, gilt dies dann sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit (2.24) erhalten wir dann zudem

$$\check{\varphi} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\check{\varphi}) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee,$$

also

$$\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi),$$

woraus sich die Behauptung ergibt.
(b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Nach der Leibnizregel gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta\varphi\, D^{\alpha-\beta}\psi, \tag{2.27}$$

wobei wir wie üblich setzen $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$, und wobei $\beta \le \alpha$ bedeute, daß $\beta_j \le \alpha_j$ für $j = 1, \dots, n$. Damit folgt leicht, daß $\varphi\psi \in \mathcal{S}$.

Die Formel $(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\hat{\psi}$ gilt nach Satz 2.3. Somit ist nach (a) insbesondere auch $\varphi * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi}) \in \mathcal{S}$. Nach Teil (a) ergibt sich hieraus

$$\varphi\psi = \mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}\varphi) * (\mathcal{F}^{-1}\psi)),$$

also

$$(\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-2n}\mathcal{F}^2(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi).$$

Wegen $\mathcal{F}^2 f(x) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(-x) = (2\pi)^n \check{f}(x)$ ergibt sich daher mit (2.24), (2.25)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)^\wedge &= (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee = (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee * (\overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee \\ &= (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}.\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7 L^2-Theorie: Der Satz von Plancherel

Wir bezeichnen für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(f, g) := \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

das Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Damit ist also die L^2-Norm gegeben durch $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$.

Satz 2.29 (Parsevals Formel) *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}). \tag{2.28}$$

Beweis. Betrachte $f := \varphi * \psi^*$. Dann ist nach Theorem 2.28 $f \in \mathcal{S}_n$, so daß nach der Fourierumkehrformel gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \int \varphi(x)\psi^*(-x)\,dx = \varphi * \psi^*(0) = f(0) \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{f}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Ferner ist $\hat{f} = \hat{\varphi}\hat{\psi}^* = \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}$. Es folgt

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}).$$

Q.E.D.

Theorem 2.30 (von Plancherel) *Die Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *läßt sich eindeutig zu einem bijektiven linearen isometrischen Operator*

$$\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$$

fortsetzen, wobei wir mit $\mathbf{d}\xi$ *das skalierte Lebesguemaß* $\mathbf{d}\xi := (2\pi)^{-n} d\xi$ *bezeichnen.*

Beweis. Da $\mathcal{S}_n$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, und da für $\varphi \in \mathcal{S}_n$ aufgrund der Parsevalschen Formel

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)} = \left(\int |\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2 (2\pi)^{-n} d\xi \right)^{1/2} = \left(\int |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)} \tag{2.29}$$

gilt, ist also $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ eine Isometrie des dichten Teilraumes $\mathcal{S}_n$ von $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ auf den dichten Teilraum $\mathcal{S}_n$ von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}x)$.
Hieraus folgt leicht mit Hilfe von Standardargumenten die Behauptung. Ist nämlich $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so wähle man eine Folge $\varphi_j \in \mathcal{S}_n$, welche in L^2 gegen f konvergiert. Nach (2.29) bildet dann die Folge der Fouriertransformierten $\hat{\varphi}_j$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$, welche wegen der Vollständigkeit des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$ einen Grenzwert $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$ besitzt. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Funktion g nicht von der Wahl der approximierenden Folge $\{\varphi_j\}_j$ abhängt. Wir setzen dann $\tilde{\mathcal{F}} f := g$. Die so auf ganz L^2 definierte Abbildung $\tilde{\mathcal{F}}$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. Die Details dieses Arguments seien der Leserin bzw. dem Leser überlassen.
Q.E.D.

Bemerkungen 2.31 *(a) Für* $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *stimmen die* „**Fourier-Plancherel-tranfomierte**" $\tilde{\mathcal{F}} f$ *von* f *und die punktweise definierte Fouriertransformierte* $\hat{f}$ *im Sinne von* L^2*-Funktionen überein.*

Nach dem Beweis von Korollar 2.14 kann man nämlich zu f eine Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ finden mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_1 = 0$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_2 = 0$. Dann konvergiert die Folge $\{\hat{\varphi}_j\}_j$ zum einen gleichmäßig gegen $\hat{f}$, und zum anderen in L^2 gegen $\tilde{\mathcal{F}} f$. Somit stimmen $\hat{f}$ und $\tilde{\mathcal{F}} f$ f.ü. überein.

Man bezeichnet daher $\tilde{\mathcal{F}}$ ebenfalls kurz als Fouriertransformation, und schreibt wieder $\hat{f}$ oder $\mathcal{F} f$ anstelle von $\tilde{\mathcal{F}} f$, falls $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Für beliebige $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt dann die Parseval-Formel*

$$(f, g) = (2\pi)^{-n} (\hat{f}, \hat{g}). \tag{2.30}$$

Kapitel 3

Fourierreihen und die Poissonsche Summationsformel

3.1 Die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}$

Wir kommen nun auf die Theorie der Fourierreihen zurück, welche wir bereits im ersten Kapitel eingeführt hatten. Ziel wird es sein zu zeigen, daß sich mit Hilfe kleiner, eher technischer Modifikationen die Ideen und Methoden des vorherigen Kapitels auf die Theorie der Fourierreihen übertragen lassen. Zugleich wollen wir die Theorie in einen allgemeineren Kontext stellen. Viele weitergehende Resultate über Fourierreihen und -integrale sowie Anwendungen dieser Theorien findet man u.a. in den Monographien [16], [1], [10] und [18].

Als Vorbereitung wollen wir zunächst zeigen, daß sich 2π-periodische Funktionen auf der reellen Achse mathematisch einfacher als Funktionen auf dem eindimensionalen Torus bzw. dem Einheitskreis auffassen lassen.
Eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nämlich offenbar dann und nur dann 2π-periodisch, wenn es eine Funktion $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}(x) = f(x + 2\pi\mathbb{Z})$. Es bezeichne Γ die diskrete Untergruppe $\Gamma := 2\pi\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$. Dann ist z.B. das Intervall $A = [0, 2\pi[$ ein Fundamentalbereich in $\mathbb{R}$ für die Wirkung von Γ, d.h. $\mathbb{R}$ ist die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma + A = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}} [2\pi k, 2\pi(k+1)[.$$

$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sei die Quotientengruppe modulo Γ, welche man auch als den **eindimensionalen Torus** bezeichnet, da die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{T} \to S^1,\ x + 2\pi\mathbb{Z} \to e^{ix}$$

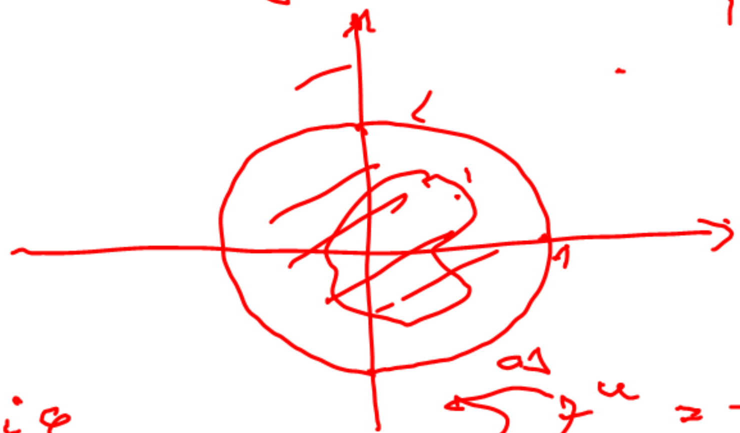
eine Bijektion zwischen $\mathbb{T}$ und dem Kreis S^1 darstellt. Wir versehen entsprechend $\mathbb{T}$ mit der mittels φ übertragenen Topologie des Kreises S^1.

$n=1$

$\mathbb{R}/2\pi = T$

e^{ix}

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, Körper



$z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$z = e^{i\varphi}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$$

Fourier-Reihe

Bemerkung 3.1 Anstelle des Intervalls $[0, 2\pi[$ könnte man hier auch jeden anderen meßbaren Fundamentalbereich A verwenden. Unter einem **Fundamentalbereich** für die Wirkung von Γ auf $\mathbb{R}$ versteht man dabei eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$, welche aus jeder Bahn von Γ, d.h. jeder Nebenklasse $x + \Gamma$, genau einen Repräsentanten enthält. In den meisten Anwendungen wird man als Fundamentalbereiche ein beliebiges halboffenes Intervall der Länge 2π verwenden, meistens die Intervalle $[0, 2\pi[$ oder $[-\pi, \pi[$.

Jede 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Einschränkung auf den Fundamentalbereich A bestimmt, und dieser wiederum wird unter der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \Gamma$, bijektiv auf $\mathbb{T}$ abgebildet. Damit ist die Abbildung $f \mapsto \tilde{f} := f \circ \pi$, welche jeder Funktion f auf $\mathbb{T}$ eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ zuordnet, bijektiv. Wir werden daher in Zukunft in der Regel Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifizieren, und gelegentlich $\tilde{f}$ kürzer ebenfalls mit f bezeichnen, falls aus dem Kontext klar ist, welche Funktion gemeint ist.

Definitionen (a) Die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ heiße **(Lebesgue) meßbar**, wenn die zugehörige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dies ist.

(b) Sie heiße k**-mal (stetig) differenzierbar**, wenn $\tilde{f}$ dies ist. $C^k(\mathbb{T})$ bezeichne den Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{T}$. Ist f differenzierbar, so ist $\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ebenfalls 2π-periodisch, d.h. es gibt eine eindeutige Funktion auf $\mathbb{T}$, welche wir mit f' bezeichnen, mit $(f')^{\sim} = \tilde{f}'$. Wir setzen dann $\frac{d}{dt} f(t) := f'(t),\ Df := \frac{1}{i}\frac{d}{dt} f$. Entsprechend sind höhere Ableitungen auf $\mathbb{T}$ definiert.

(c) Mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}),\ 1 \leq p \leq \infty$, bezeichnen wir den Raum aller meßbaren Funktionen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, für welche die zugehörige Funktion $\tilde{f}$ über den Fundamentalbereich A p-fach integrierbar ist, d.h. $\tilde{f}\ |_{[0,2\pi[} \in \mathcal{L}^p([0, 2\pi[)$. $L^p(\mathbb{T})$ bezeichne den Raum aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$-Funktionen modulo Nullfunktionen. Wie üblich werden wir meist $\mathcal{L}^p$ mit L^p identifizieren.
Das **Integral** der L^1-Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ ist definiert durch

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt := \oint \tilde{f}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)dx.$$

Man kann übrigens leicht zeigen (Übung), daß für jeden meßbaren Fundamentalbereich A dann gilt

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\ |_A\, dx. \tag{3.1}$$

Entsprechend wird die L^p**-Norm** von $f \in L^p(\mathbb{T})$ definiert durch

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \begin{cases} (\int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt)^{1/p}, & \text{falls } 1 \le p < \infty, \\ \|\tilde{f}\,|_A\,\|_\infty, & \text{falls } p = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)dt = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\,dt \quad \text{für alle } s \in \mathbb{T}, \tag{3.3}$$

d.h. das Integral auf $\mathbb{T}$ ist translationsinvariant. Da das Intervall $[-s, -s+2\pi[$ nämlich einen meßbaren Fundamentalbereich bildet, gilt nach (3.1) offenbar

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi[} \tilde{f}(x-s)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-s,-s+2\pi[} \tilde{f}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\,dt.$$

Bezeichnet $\mu = dt$ das zugehörige Maß auf $\mathbb{T}$, welches für jede meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{T}$ gegeben ist durch

$$|M| := \mu(M) := \int\limits_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_M(t)dt,$$

so ist dieses folglich ebenfalls translationsinvariant. Man bezeichnet dt daher auch als das **Haarsche Maß** der (kompakten) Gruppe $\mathbb{T}$. Man beachte, daß im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ die Gruppe $\mathbb{T}$ endliches Maß hat, genauer gilt sogar

$$\mu(\mathbb{T}) = \int\limits_{\mathbb{T}} 1\,dt = 1. \tag{3.4}$$

Damit gilt nach Hölder für jedes $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt &= \int\limits_{\mathbb{T}} 1 \cdot |f(t)|\,dt \\ &\le \|\mathbf{1}\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

d.h. im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ gilt hier stets die Inklusion

$$L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}), \qquad \text{für } 1 \le p \le \infty, \tag{3.5}$$

und

$$\|f\|_1 \le \|f\|_p \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{3.6}$$

Man kann ganz analog zu Theorem 2.2 beweisen, daß für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ die **Faltung**

$$f * g(t) := \int\limits_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s)ds = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)ds$$

für fast alle $t \in \mathbb{T}$ definiert ist, daß $f * g$ integrierbar ist, und daß

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \; \|g\|_1.$$

Wegen (3.5) ist damit auf $\mathbb{T}$ folglich die Faltung einer beliebigen Funktion $f \in L^p(\mathbb{T})$ mit einer beliebigen Funktion $g \in L^r(\mathbb{T})$, $1 \leq p, r \leq \infty$, wohldefiniert, im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$.
Setzen wir wieder $f^*(t) := \overline{f(-t)}$, dann folgt ferner in Analogie zu Theorem 2.2, daß $(L^1(\mathbb{T}), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ ebenfalls eine kommutative involutive Banachalgebra ist, die sogenannte **Gruppenalgebra des Torus** $\mathbb{T}$. Ähnlich wie in Satz 2.5 zeigt man, daß für $f \in L^1(\mathbb{T}),\; g \in C^k(\mathbb{T})$ die Faltung $f * g$ in $C^k(\mathbb{T})$ liegt, und daß dann gilt

$$D^j(f * g) = f * D^j g, \quad 0 \leq j \leq k. \tag{3.7}$$

Ferner liegt, in Analogie zu Korollar 2.14, für jedes p mit $1 \leq p < \infty$ der Raum $C^\infty(\mathbb{T})$ dicht in $L^p(\mathbb{T})$, da mit Theorem 3.5 ein Analogon zu Theorem 2.13 gilt.

Definitionen (a) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\tilde{e}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Charakter $\tilde{e}_k(x) := e^{ikx},\; x \in \mathbb{R}$. Da $\tilde{e}_k$ 2π-periodisch ist, kann man $\tilde{e}_k$ mit einer Funktion $e_k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ identifizieren, und man schreibt suggestiv auch

$$e_k(t) = e^{ikt},\; t \in \mathbb{T}.$$

Offenbar ist jedes e_k stetig, und es gilt

$$e_k(s+t) = e_k(s)e_k(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{T},$$

d.h. e_k ist ein stetiger Homomorphismus der Gruppe $\mathbb{T}$ in die Kreisgruppe S^1, d.h. ein **Charakter** von $\mathbb{T}$. Man kann zeigen, daß jeder Charakter von $\mathbb{T}$ von dieser Gestalt ist.

(b) Ist $f \in L^1(\mathbb{T})$, so setzen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) \;&:=\; \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)}dt = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(x)e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

$\hat{f}(k)$ heißt der k**-te Fourierkoeffizient** von f, und die Abbildung $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ k \mapsto \hat{f}(k)$, **die Fouriertransformierte** von f.
Bezeichnen wir für $s \in \mathbb{T}$ mit λ_s den Translationsoperator $\lambda_s f(t) := f(t-s)$, so gilt offenbar für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ in Analogie zu Satz 2.1 die Identität

$$\widehat{(\lambda_s f)}(k) = e^{-iks}\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Ferner gilt bei fast wortgleichem Beweis das folgende Analogon zu Lemma 2.6:

Lemma 3.2 (Stetigkeit der Translation in $L^p(\mathbb{T})$) *Sei $1 \leq p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{T})$. Dann gilt*

$$\|\lambda_s f\|_p = \|f\|_p \tag{3.9}$$

für alle $s \in \mathbb{T}$, sowie

$$\lim_{s \to 0} \|\lambda_s f - f\|_p = 0. \tag{3.10}$$

Hier bezeichne 0 das neutrale Element $0 + 2\pi\mathbb{Z}$ von $\mathbb{T}$. Unter einer **approximierenden Eins** auf $\mathbb{T}$ verstehen wir eine Familie $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit folgenden Eigenschaften: Es gebe ein $C \geq 0$ so, daß gilt

(i)
$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1 \qquad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_\varepsilon(t)|\, dt \leq C \qquad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(iii) für jede Umgebung U der Null in $\mathbb{T}$ gilt
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{T}\setminus U} |\varphi_\varepsilon(t)|\, dt = 0.$$

.

Liegen die φ_ε in $C^\infty(\mathbb{T})$, so wollen wir eine solche approximierende Eins auch als **Dirac-Familie** (und für jede fallende Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$ die Folge $\{\varphi_j\}_j := \{\varphi_{\varepsilon_j}\}_j$ als **Dirac-Folge**) auf $\mathbb{T}$ bezeichnen.
Da auf dem Torus im Gegensatz zum Euklidischen Raum keine Dilatationen zur Verfügung stehen, kann man hier nicht mehr einfach durch Skalierung einer festen Funktion eine solche approximierende Eins konstruieren. Dennoch lassen sich relativ einfach approximierende Einsen auf dem Torus angeben.

Beispiel: Der Poissonkern. Im Zusammenhang mit der „Abelschen Summation“ von Fourierreihen (siehe z.B. [16]) tritt der sogenannte **Poissonkern**

$$P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}, \; (0 \le r < 1) \tag{3.11}$$

auf. Durch Summation einer geometrischen Reihe erhält man leicht den folgenden expliziten Ausdruck für P_r :

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}. \tag{3.12}$$

Lemma 3.3 *Setzen wir $\phi_\varepsilon := P_{e^{-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, so ist $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ eine Dirac-Familie.*

Beweis. Durch termweise Integration der Reihe (3.12) (welche zulässig ist, da die Reihe gleichmäßig konvergiert) erhalten wir sofort

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_\varepsilon(t)\, dt = 1 \qquad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0.$$

Ferner ist wegen

$$|2r\cos t| \le r^2 + (\cos t)^2 \le 1 + r^2 \tag{3.13}$$

stets $P_r(t) \ge 0$, womit auch die zweite Eigenschaft (ii) einer approximierenden Eins erfüllt ist.
Um die dritte Eigenschaft (iii) nachzuweisen genügt es offenbar zu zeigen, daß für jedes $\delta \in]0, \pi[$ gilt

$$\int_{\delta \le |t| \le \pi} P_r(t)\, dt \to 0, \quad \text{falls } r \to 1. \tag{3.14}$$

Nach (3.13) gilt jedoch $1 - 2r\cos t + r^2 \ge 1 - (\cos t)^2 \ge 1 - (\cos\delta)^2 =: c_\delta > 0$, falls $\delta \le |t| \le \pi/2$, und für $\pi/2 < |t| \le \pi$ gilt trivialerweise ebenfalls $1 - 2r\cos t + r^2 \ge c_\delta > 0$. Somit gilt für $\delta \le |t| \le \pi$ stets $P_r(t) \le (1 - r^2)/c_\delta$, woraus (3.14) unmittelbar folgt.
Da in der Reihe $\phi_\varepsilon(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|\varepsilon} e^{ikt}$ beliebig oft termweise nach t differenziert werden darf, so ist schließlich ϕ_ε eine glatte Funktion.

Q.E.D.

Bemerkung 3.4 Nach Satz 1.3 und (3.11) gilt übrigens offenbar für ϕ_ε die Fourier-Umkehrformel $\phi_\varepsilon(t) = \sum_k \widehat{\phi_\varepsilon}(k) e^{ikt}$, für alle $t \in \mathbb{T}$.

Bei fast wortgleichem Beweis gilt analog zu Theorem 2.13

Theorem 3.5 *Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ eine approximierende Eins auf $\mathbb{T}$.*

(a) Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, so gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

(b) *Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})$ gleichmäßig stetig in den Punkten einer Menge $V \subset \mathbb{T}$, so konvergiert $f * \varphi_\varepsilon$ auf V gleichmäßig gegen f, falls $\varepsilon \to 0$.*

Bemerkung 3.6 Der Poissonkern spielt insbesondere auch in der Theorie der Laplace-Gleichung auf der Einheitskreisscheibe $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ eine fundamentale Rolle. Führt man nämlich Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, \quad 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi$, in D ein, so ist die durch $F(r\cos\theta, r\sin\theta) := P_r(\theta)$ auf D definierte Funktion F **harmonisch,** d.h. es gilt $\Delta F = 0$ in D. In Polarkoordinaten ist der Laplace-Operator nämlich, wie man leicht zeigt, gegeben durch

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

so daß dies sofort aus (3.11) folgt.
Ist nun $f \in L^1(\mathbb{T})$, und definiert man die Funktion $\tilde{u}(r,\theta) := f * P_r(\theta), \quad 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi$, so gilt mit (3.7) offenbar

$$\tilde{\Delta}\tilde{u}(r,\theta) = f * ((\tilde{\Delta}\tilde{F})(r,\cdot))(\theta) = 0,$$

falls man $\tilde{F}(r,\theta) := P_r(\theta)$ setzt. Die zugehörige Funktion $u(r\cos\theta, r\sin\theta) := \tilde{u}(r,\theta)$ ist also harmonisch in D. Ferner gilt nach Theorem 3.5

$$\lim_{r\to 1} \tilde{u}(r,\theta) = f \text{ in } L^1(\mathbb{T}).$$

Identifizieren wir wieder den Torus $\mathbb{T}$ mit dem Rand $\partial D = S^1$ der Kreisscheibe D, so konvergiert also die Einschränkung von u auf den Kreis rS^1 mit Radius r für $r \to 1$ gegen die Funktion f (zumindest im L^1-Sinne). Damit löst u in dem angegebenen Sinne das **Dirichletsche Randwertproblem**

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } D, \\ u|_{\partial D} &= f. \end{aligned}$$

Mit einigem Mehraufwand läßt sich sogar beweisen, daß

$$\lim_{r\to 1} \tilde{u}(r,\theta) = f(\theta) \text{ für f.a. } \theta$$

gilt (vergl. z.B. [18] für ein analoges Resultat im oberen Halbraum).

Mit Theorem 3.5 läßt sich nun auch der Beweis der Fourier-Umkehrformel leicht übertragen.
Wir bezeichenen mit $\ell^p(\mathbb{Z})$ den Raum aller zur p-ten Potenz summierbaren Abbildungen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, versehen mit der Norm $\|g\|_p := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)|^p\right)^{1/p}$, falls $1 \le p < \infty$, und der Supremumsnorm $\|g\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |g(k)|$, falls $p = \infty$.

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Theorem 3.7 (Fourier-Umkehrformel auf $\mathbb{T}$) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ so, daß $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann gilt*

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt} \tag{3.15}$$

für fast alle $t \in \mathbb{T}$.

Beweis. Sei $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon > 0$ die Dirac-Familie aus Lemma 3.3. Dann gilt

$$\widehat{f * \phi_\varepsilon}(k) = \hat{f}(k)\widehat{\phi_\varepsilon}(k) = e^{-|k|\varepsilon}\hat{f}(k).$$

Da $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ folglich die Reihe $\sum_k \widehat{f * \phi_\varepsilon}(k)e^{ikt} = \sum_k e^{-|k|\varepsilon}\hat{f}(k)e^{ikt}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ gegen den Wert der Fourierreihe

$$Sf(t) = \sum_k \hat{f}(k)e^{ikt}$$

von f (welche absolut konvergent ist).
Ferner gilt nach Bemerkung 3.4

$$\begin{aligned}
\sum_k \hat{f}(k)\widehat{\phi_\varepsilon}(k)e^{ikt} &= \sum_k \int_{\mathbb{T}} f(s)e^{-iks}ds\, e^{ikt}\widehat{\phi_\varepsilon}(k) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(s) \sum_k \widehat{\phi_\varepsilon}(k)e^{ik(t-s)}\, ds = \int_{\mathbb{T}} f(s)\phi_\varepsilon(t-s)\, ds \\
&= f * \phi_\varepsilon(t),
\end{aligned}$$

da die Fourierreihe von ϕ_ε gleichmäßig konvergent ist. Da $f * \phi_\varepsilon$ nach Theorem 3.5 in $L^1(\mathbb{T})$ gegen f strebt, gibt es eine Teilfolge $\{f * \phi_{\varepsilon_j}\}_j$, welche f.ü. gegen f konvergiert. Damit ergibt sich die behauptete Umkehrformel für f.

Q.E.D.

Bemerkung 3.8 Die Forderung $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ in Theorem 3.7 ist recht stark; z.B. ist sie nicht erfüllt, wenn f die Indikatorfunktion eines Intervalls der Länge L mit $0 < L < 2\pi$ ist, wie man sofort nachrechnet.
Andererseits gibt es nach Kolmogorov L^1-Funktionen auf $\mathbb{T}$, für welche die Fourierreihe überall punktweise divergiert (siehe z.B.[10])!
Einer der tiefliegendsten Sätze der Fourieranalysis, nämlich der Satz von L. Carleson, besagt andererseits, daß die Fourierreihe einer Funktion f stets punktweise f.ü. gegen f konvergiert, falls $f \in L^2(\mathbb{T})$ ist. Dieses Ergebnis wurde anschließend von R. Hunt auf L^p- Funktionen f für beliebiges $p > 1$ ausgedehnt. Für $p > 1$ ist also de facto keine weitere Voraussetzung an die Fouriertransformierte $\hat{f}$ erforderlich! Einen neueren Beweis dieses Satzes, welcher auf M. Lacey und Ch. Thiele zurückgeht, findet man in [6].

Für die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}$ gilt ebenfalls das **Riemann-Lebesgue-Lemma**: $\hat{f}$ verschwindet auf $\mathbb{Z}$ im Unendlichen für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$, d.h.

$$\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0 \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{T}) \tag{3.16}$$

(vergleiche Aufgabe T.2). Mit Hilfe der Formel

$$\widehat{D^j f}(k) = k^j \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, f \in C^j(\mathbb{T}), \tag{3.17}$$

läßt sich übrigens auch der in Theorem 2.22 gegebene Beweis leicht übertragen. Diese impliziert nämlich, daß

$$|\hat{f}(k)| \leq \|D^j f\|_1 |k|^{-j}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

falls $f \in C^j(\mathbb{T})$. Bezeichnt $c_\infty(\mathbb{Z}) = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \lim_{|k|\to 0} |a(k)| = 0\}$ den Raum aller „Nullfolgen" auf $\mathbb{Z}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so liegt nach (3.18) offenbar $\hat{f}$ in $c_\infty(\mathbb{Z})$, falls $f \in C^1(\mathbb{T})$. Ferner sieht man mit Hilfe von Theorem 3.5 und (3.7) leicht, daß der Raum $C^\infty(\mathbb{T}) \subset C^1(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ liegt.
Ganz analog zu Korollar 2.23 gilt damit dann das folgende

Theorem 3.9 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto \hat{f}$, ist ein stetiger, linearer Homomorphismus der involutiven Banachalgebra $(L^1(\mathbb{T}), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ in die involutive Banachalgebra $(c_\infty(\mathbb{Z}), +, \cdot, \overline{}; \|\cdot\|_\infty)$.*

Insbesondere gilt also für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge &= \hat{f}\hat{g}, \\ (f^*)^\wedge &= \overline{\hat{f}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Umkehrformel gilt auch hier der **Eindeutigkeitssatz**, d.h. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_\infty(\mathbb{Z})$ ist injektiv.

Bemerkung 3.10 Die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion auf $\mathbb{T}$ ist eine Funktion auf der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$, nicht auf $\mathbb{T}$! Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist nämlich unter der Abbildung $k \mapsto e_k$ isomorph zur multiplikativen Gruppe $\hat{\mathbb{T}}$ aller (stetigen) Charaktere von $\mathbb{T}$, der sogenannten **dualen Gruppe** von $\mathbb{T}$, und die Fouriertransformierte $\hat{f}$ kann somit als Funktion auf $\hat{\mathbb{T}}$ betrachtet werden. Definiert man nun die **Fourier-Kotransformierte** $\overline{\mathcal{F}}a$ einer Funktion $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ durch die Fourierreihe

$$\overline{\mathcal{F}}a(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k) e^{ikt}, \ t \in \mathbb{T},$$

so ist dies eine Funktion auf $\mathbb{T}$, und die Fourier-Umkehrformel (3.15) läßt sich damit schreiben als

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) \text{ f.ü. }, \tag{3.19}$$

in Analogie zur Umkehrformel auf dem $\mathbb{R}^n$, die die Gestalt $f = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ besitzt. Nun sieht man sofort, daß jeder Charakter der Gruppe $\mathbb{Z}$, d.h. jeder Gruppenhomomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (S^1, \cdot)$, von der Gestalt

$$\chi(k) = e_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{3.20}$$

ist für ein $t \in \mathbb{T}$, d.h. die Gruppe der Charaktere $\hat{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ besteht aus den Funktionen $e_t(k) := e^{ikt}$, mit $t \in \mathbb{T}$. Somit läßt sich $\mathbb{T}$ als duale Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ zu $\mathbb{Z}$ auffassen, und die Fourier-Kotransformierte von $a \in \ell_1(\mathbb{Z})$ als eine Funktion auf $\mathbb{T} \simeq \hat{\mathbb{Z}} \simeq (\hat{\mathbb{T}})^\wedge$.
Eine ähnliche Konstruktion ist auf jeder lokal-kompakten abelschen Gruppe G möglich, da nach dem **Pontryaginschen Dualitätssatz** $(\hat{G})^\wedge$ stets isomorph zu G ist (siehe z.B. [1], [10]). Für $\mathbb{R}^n$ ist übrigens, wie bereits erwähnt, $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$. Dies erklärt, weshalb auf dem $\mathbb{R}^n$ die Fouriertransformierte einer Funktion wieder eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist!

Wir betrachten schließlich die Fouriertransfomation auf $L^2(\mathbb{T})$. Da $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ ist, ist hier $\hat{f}(k)$ punktweise definiert, und $\hat{f}$ liegt sicherlich in $c_\infty(\mathbb{Z})$, falls $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Theorem 3.11 (Plancherel-Theorem für $\mathbb{T}$) *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein linearer isometrischer Operator von $L^2(\mathbb{T})$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$; insbesondere gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ die Parsevalsche Formel*

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}}(k). \tag{3.21}$$

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$, und sei zunächst $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$. Dann ist auch $f*\psi^* \in C^\infty(\mathbb{T})$, so daß $(f * \psi^*)^\wedge = \hat{f}\overline{\hat{\psi}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ist (wieso?). Nach Theorem 3.7 folgt

$$\begin{aligned} (f, \psi) &:= \int_T f(t)\overline{\psi}(t)dt = f * \psi^*(0) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f * \psi^*}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\psi}}(k) \\ &:= (\hat{f}, \hat{\psi}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Insbesondere ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, falls auch f glatt ist. Seien nun $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $\{\psi_j\}_j$ in $C^\infty(\mathbb{T})$ mit $g = \lim_{j\to\infty} \psi_j$ in $L^2(\mathbb{T})$. Mit (3.22) folgt $(f, g) = \lim_{j\to\infty}(f, \psi_j) = \lim_{j\to\infty}(\hat{f}, \hat{\psi}_j)$. Ferner bildet die Folge $\{\hat{\psi}_j\}_j$ eine Cauchy-Folge in $\ell^2(\mathbb{Z})$, welche somit einen Grenzwert $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ besitzt. Andererseits konvergiert wegen (3.6) die Folge $\{\psi_j\}_j$ auch in $L^1(\mathbb{T})$ gegen g, und somit gilt $\hat{g}(k) = \lim_{j\to\infty} \hat{\psi}_j(k)$, für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Zusammen erhalten wir $h = \hat{g}$, d.h. $\hat{g} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ und

$$(f, g) = \lim_{j\to\infty} (\hat{f}, \hat{\psi}_j) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

Schließlich sei

$$c_0(\mathbb{Z}) := \{a \in \ell^2(\mathbb{Z}) : a(k) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Offenbar ist $c_0(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{T}))$, und $c_0(\mathbb{Z})$ liegt dicht in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Es folgt $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{T})) = \ell^2(\mathbb{Z})$.

Q.E.D.

Korollar 3.12 *Die Charaktere $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$.*

Beweis. Wir wissen nach (1.11) bereits, daß die $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bilden. Dessen Vollständigkeit folgt damit sofort aus der Plancherel-Formel $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, da $(f, e_k) = \hat{f}(k)$.

Q.E.D.

3.2 Zur punktweisen Konvergenz von Fourierreihen

$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ bezeichne wieder

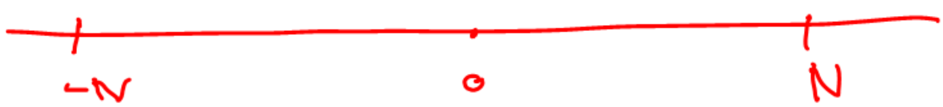
$$S_N f(t) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

die N-te Partialsumme der Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}$. Offenbar ist

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{ik(t-s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(t-s)} \right) ds, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$S_N f(t) = f * D_N(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.23}$$



wobei

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$S_N f = D_N * f$

den **Dirichlet-Kern** der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ bezeichne. Durch Summation einer geometrischen Reihe erhält man

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1, & x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Wir wollen hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß die Fourierreihe von f in einem Punkt $t \in \mathbb{T}$ gegen $f(t)$ konvergiert. Dazu werden wir folgende Eigenschaften von D_N ausnutzen, welche sich unmittelbar aus der Definition ergeben:

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(t)dt = 1, \tag{3.25}$$

gerade

$$\check{D}_N = D_N. \tag{3.26}$$

Man kann allerdings beweisen (Übung), daß

$$\int_{\mathbb{T}} |D_N(t)|dt \sim \log N \quad \text{für } N \to \infty,$$

so daß die Folge der D_N, im Gegensatz zur Folge ϕ_{ε_j} von Poisson-Kernen, welche wir im Beweis der Fourier-Umkehrformel verwendet hatten, leider keine approximierende Eins bildet. Wegen (3.26) werden wir im folgenden das „symmetrische " Intervall $[-\pi, \pi[$ als Fundamentalbereich benutzen.

Theorem 3.13 (Dini) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, und sei $t \in \mathbb{T}$. Gibt es ein $A \in \mathbb{C}$ mit*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right| \frac{ds}{s} < \infty, \tag{3.27}$$

so gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(t) = A.$$

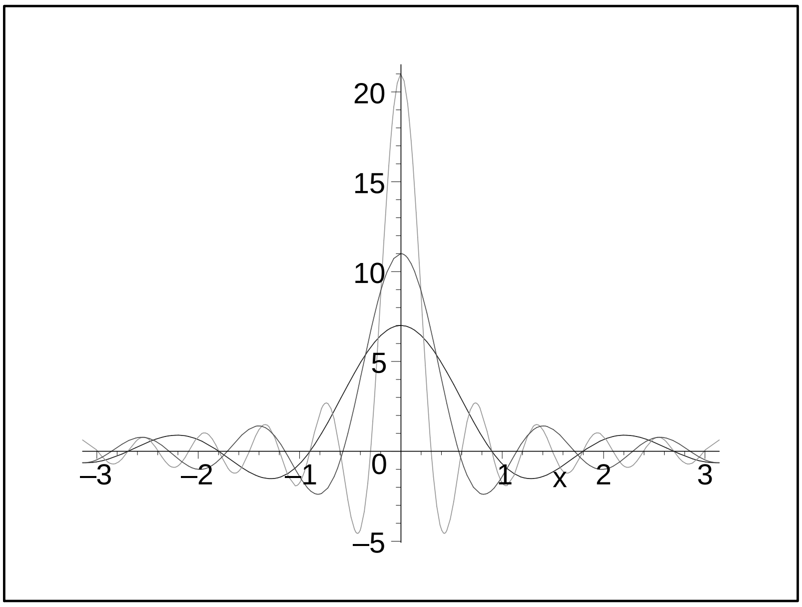


Abbildung 3.1: Dirichlet-Kerne, $N = 3, 5, 10$

Beweis. Wegen (3.26) ist

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= f * D_N(t) = D_N * f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+s) D_N(s) ds. \end{aligned}$$

Durch Mittelwertbildung erhalten wir

$$S_N f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_N(s) ds,$$

und folglich mit (3.25)

$$S_N f(t) - A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) D_N(s) ds.$$

Bezeichnen wir mit J_N die rechte Seite dieser Gleichung, so ist zu zeigen, daß $\lim\limits_{N\to\infty} J_N = 0$. Dazu setzen wir für $s \in]-2\pi, 2\pi[$

$$h(s) := \begin{cases} \frac{1}{\sin(s/2)} - \frac{1}{s/2}, & s \neq 0, \\ 0, & s = 0. \end{cases}$$

Man sieht rasch, daß h analytisch in $]-2\pi, 2\pi[$ ist; insbesondere ist $h \in C^\infty(]-2\pi, 2\pi[)$. Ferner ist nach (3.24)

$$\begin{aligned}
2\pi J_N &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} - A \right) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})s}{s/2} ds \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} - A \right) h(s) \sin(N + \frac{1}{2})s \; ds.
\end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned}
f_1(s) &:= \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) \frac{1}{s/2}, \\
f_2(s) &:= \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) h(s).
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung des Theorems besagt, daß $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ ist. Da h auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt ist, ist ferner auch $f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
2\pi J_N &= \sum_{j=1}^{2} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) \sin(N + \frac{1}{2})s \; ds \\
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2i} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) e^{i(N+\frac{1}{2})s} ds - \int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) e^{-i(N+\frac{1}{2})s} ds \right].
\end{aligned}$$

Wendet man das Riemann-Lebesgue Lemma auf letztere Integrale an, so folgt $J_N \to 0$ für $N \to \infty$.

Q.E.D.

Korollar 3.14 (Satz von Dirichlet) *Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar, d.h. es gebe eine Zerlegung $-\pi = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{m+1} = \pi$ des Intervalls $[-\pi, \pi]$ so, daß sich $f\,|_{]\tau_j, \tau_{j+1}[}$ für jedes $j = 0, \ldots, m$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ fortsetzen läßt. Für $t \in [-\pi, \pi]$ bezeichne $f(t \pm 0)$ den einseitigen Grenzwert*

$$f(t \pm 0) := \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \tau > 0}} f(t \pm \tau).$$

Dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Ist f stetig im Punkte t, so folgt insbesondere

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(t) = f(t).$$

Beweis. Setze im Satz von Dini $A := \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. Für $s > 0$ ist dann

$$\frac{1}{s}\left(\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - A\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(t+s)-f(t+0)}{s} - \frac{f(t-0)-f(t-s)}{s}\right].$$

Da f stückweise stetig differenzierbar ist, existieren für $s \to 0$ die Grenzwerte von $\frac{f(t+s)-f(t+0)}{s}$ und $\frac{f(t-0)-f(t-s)}{s}$, und stimmen mit der rechtsseitigen Ableitung $f'(t+0)$ bzw. der linksseitigen Ableitung $f'(t-0)$ von f im Punkte t überein. Damit ist der Integrand

$$g(s) := \left|\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - A\right| \cdot \frac{1}{s}$$

stetig in 0, d.h. mit f ist auch g stückweise stetig. Insbesondere ist $\int\limits_0^\pi g(s)ds < \infty$. Damit folgt der Satz von Dirichlet aus dem Satz von Dini (welcher chronologisch allerdings nach dem Satz von Dini angesiedelt ist) .

Q.E.D.

3.3 Die Poissonsche Summationsformel

Sei f eine „gutartige“ Funktion auf $\mathbb{R}$, beispielsweise eine Schwartzfunktion. Dann können wir f auf die beiden folgenden Arten eine 2π-periodische Funktion zuordnen:

(a) Wir setzen
$$f_1(x) := 2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x+\ell 2\pi),\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir betrachten die Fouriertransformierte $\hat{f}$ nur auf den ganzen Zahlen, und ordnen den Koeffizienten $\hat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihe
$$f_2(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}$$
zu. Dann sind sowohl f_1 als auch f_2 offenbar 2π-periodisch, so daß wir beide Funktionen als Funktionen auf $\mathbb{T}$ betrachten können. Wir werden sehen, daß f_1 und f_2 übereinstimmen.

Theorem 3.15 *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ stetig und erfülle die beiden folgenden Bedingungen:*

(i) die Reihe $\sum\limits_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x+\ell 2\pi)$ konvergiere lokal gleichmäßig (also auch gleichmäßig auf jedem Kompaktum) in $\mathbb{R}$;

(ii) die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ *konvergiere absolut.*

Dann gilt die **Poissonsche Summationsformel**

$$2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(2\pi\ell) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k). \tag{3.28}$$

Bemerkungen 3.16 *(a) Mit f erfüllt auch die um y verschobene Funktion $\lambda_y f = f(\cdot - y)$ die Voraussetzungen des Theorems. Wendet man daher die Poissonsche Summationsformel auf $\lambda_{-x} f$ an, so erhält man die folgende Verallgemeinerung von* (3.28)*:*

$$\boxed{2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x + \ell 2\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}.} \tag{3.29}$$

(b) Sei $a > 0$. Ersetzt man f durch $af(a\,\cdot)$, so ergibt sich folgende Verallgemeinerung der Formel (3.28) *:*

$$2\pi a \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(\ell 2\pi a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right). \tag{3.30}$$

(c) Man sieht leicht, daß die Bedingungen (i) und (ii) des Theorems erfüllt sind, falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ Abschätzungen der Form

$$f(x) = O((1 + |x|)^{-1-\delta}), \quad |x| \to \infty,$$

und

$$\hat{f}(\xi) = O((1 + |\xi|)^{-1-\delta}), \quad |\xi| \to \infty,$$

genügt, mit einem $\delta > 0$. Dies trifft insbesondere für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu.

Beweis. Nach (i) ist die Funktion

$$f_1 : t \mapsto f_1(t) := 2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(t + \ell 2\pi) \tag{3.31}$$

stetig und 2π-periodisch. Wir berechnen ihre Fourierkoeffizienten: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3.31)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi[} f(t + \ell 2\pi)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{[\ell 2\pi,(\ell+1)2\pi[} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = \hat{f}(k).
\end{aligned}$$

Wegen (ii) läßt sich die Fourier-Umkehrformel (3.15) auf f_1 anwenden, und es folgt

$$2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell 2\pi) = f_1(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Man beachte dabei, daß wegen der Stetigkeit von f_1 und aufgrund der Bedingung (ii) die Fourier-Umkehrformel (3.15) für jedes $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Q.E.D.

Beispiele 3.17 (a) Sei $f = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Dann ist $f(x) = (1-|x|)_+$, und wegen

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}(\xi) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$$

folgt

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

Wählt man nun in (3.30) $a := 1/\pi$, so folgt

$$2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(2\ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(k\frac{\pi}{2})}{(k\frac{\pi}{2})^2},$$

also

$$2 = 1 + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{((2\ell+1)\frac{\pi}{2})^2},$$

d.h.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) Wählt man für f den Gaußkern $\Phi_1(x) = e^{-x^2/2}$, so gilt mit Lemma 2.24, wenn wir $a := \sqrt{\frac{s}{2\pi}}$ wählen:

$$\sqrt{2\pi s} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\ell^2 \pi s} = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2\pi}{s}}, \quad \text{für alle } s > 0.$$

Damit erhalten wir die bekannte **Funktionalgleichung**

$$s^{-1/2} \vartheta(1/s) = \vartheta(s), \quad s > 0 \tag{3.32}$$

für die **Theta-Funktion**

$$\vartheta(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}, \quad s > 0$$

3.4 Mehrdimensionale Fourierreihen

Die Theorie der Fourierreihen läßt sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern.
Offenbar kann man jede Funktion f auf dem n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n$ mit einer mehrfach 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren (d.h. $\tilde{f}(x_1 + 2\pi k_1, \ldots, x_n + 2\pi k_n) = \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.) An die Stelle von $2\pi\mathbb{Z}$ tritt hier also das Gitter $\Gamma := 2\pi\mathbb{Z}^n$ im $\mathbb{R}^n$. Als Fundamentalbereich für die Wirkung von Γ auf dem $\mathbb{R}^n$ kann man z.B. den Würfel $A := [0, 2\pi[^n$ wählen. Das Integral über den n-Torus ist dann definiert durch

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t)\, dt := (2\pi)^{-n} \int_A \tilde{f}(x)\, dx.$$

Die stetigen Charaktere der Gruppe $\mathbb{T}^n$ sind gerade die Tensorprodukte $e_k(t) := e^{ik \cdot t} = e^{ik_1 t_1} \cdots e^{ik_n t_n}, \quad k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, von Charakteren des eindimensionalen Torus, und die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} f(t)\overline{e_k(t)}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Sämtliche Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 lassen sich damit auf offenkundige Art und Weise unmittelbar auf den höherdimensionalen Fall übertragen.
Beispielweise kann man im Beweis der Fourier-Umkehrformel als approximierende Eins das n-fache Tensorprodukt $\phi_\varepsilon^n(t) := \phi_\varepsilon(t_1) \cdots \phi_\varepsilon(t_n),\ \varepsilon > 0$, der „Poissonkerne“ ϕ_ε aus dem Beweis von Theorem 3.7 verwenden, und erhält bei fast wortgleichem Beweis die **Fourier-Umkehrformel auf dem** $\mathbb{T}^n$:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot t}, \quad \text{für fast alle } \ t \in \mathbb{T}^n, \tag{3.33}$$

falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}^n)$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$.
Mehr zur Theorie höherdimensionaler Fourierreihen findet man beispielweise in [18].