Übungsblatt 12

Analysis III WS 2022

16.01.2023

1) **Fourier-Transformierte vom Rechteck- und Dreiecksfenster**
Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Im Folgenden ist $\lambda > 0$ ein konstanter Parameter. Wir definieren die folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$f_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\chi_{[-\lambda,\lambda]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, & |t| \le \lambda\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

$$f_2(t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4\lambda}}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right), & |t| \le 2\lambda\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die Funktion f_1 wird Rechteckfenster genannt, und f_2 Dreiecksfenster.

(a) Man bestimme die Fourier-Transformierten $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ und zeige, dass f_1, f_2, $\hat{f}_2$ in $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ liegen, und dass $\hat{f}_1$ in $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, aber nicht in $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ liegt.

(b) Man berechne die L_2-Normen $\|f_1\|_2$, $\|f_2\|_2$, $\|\hat{f}_1\|_2$ sowie $\|\hat{f}_2\|_2$.

2) a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Man berechne $\hat{f}$.

b) Man beweise

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+x^2}\,dx = e^{-|\xi|}.$$

3) A sei eine reelle, symmetrische und positiv definite $n \times n$-Matrix. Man berechne $\hat{f}$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\langle x, Ax \rangle}$.