Übungsblatt 13

Analysis III WS 2022

23.01.2023

Bei der Untersuchung spezieller Funktionen ist es häufig nützlich, ihrer Struktur besonderes gut angepasste Kordinatensysteme zu verwenden. Dazu gehören z. B.

die sog. „Kugelkoordinaten“ (auch „Polarkoordinaten” in zwei Dimensionen):

$$n=2: \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix}, \qquad n=3: \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

mit dem Radius $r = \|x\|_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ und den Winkeln $\theta \in [0, 2\pi)$ zwischen dem Ortsvektor x und der x_1-Achse sowie, in drei Dimensionen, $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen dem Ortsvektor x und der x_3-Achse. Jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 2, 3)$ läßt sich als Funktion bzgl. dieser Kugelkoordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} n=2: &\quad f(x_1, x_2) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) =: F(r,\theta), \\ n=3: &\quad f(x_1, x_2, x_3) = f(r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin\varphi, r\cos(\varphi)) =: F(r,\theta,\varphi). \end{aligned}$$

a) Man zeige, daß der Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \;_{i=1}\partial_i^2$ für solche Funktionen $F(r,\theta)$ bzw. $F(r,\theta,\varphi)$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} n=2: &\quad \Delta f(x_1,x_2) = (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2)F(r,\theta), \\ n=3: &\quad \Delta f(x_1,x_2,x_3) = \Big(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\partial_\theta^2 + r^{-2}\partial_\varphi^2 + \frac{\cos(\varphi)}{r^2\sin(\varphi)}\partial_\varphi\Big)F(r,\theta,\varphi) \end{aligned}$$

b) Man bestimme für den Laplace-Operator $\Delta := \operatorname{div}\operatorname{grad}$ im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$n=2: \quad \Delta\log(\|x\|_2) = ?, \qquad n=3: \quad \Delta(\|x\|_2^{-1}) = ?$$

c) Man berechne die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante für die durch

$$(i) \quad v(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad v(r,\theta,z) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix},$$

definierten Abbildungen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zwischen welchen Teilmengen Urbild- und Bildbereich sind diese Abbildungen jeweils bijektiv? In welchen Punkten ist J_v jeweils irregulär? (Bemerkung: Die Abbildung (i) entspricht gerade den o.a. Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, während die Abbildung (ii) zu den sog. „Zylinderkoordinaten“ im $\mathbb{R}^3$ gehört.)