Historische Einführung

Wohl dem, der seiner Väter gern gedenkt (J.W. v. GOETHE).

1. … „Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht – oder ob er meinem Grundsatz beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a+b\sqrt{-1}=a+bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt sein würde …“.

Diese denkwürdigen Zeilen schrieb C.F. GAUSS (1777–1855) am 18. Dezember 1811 an BESSEL; sie markieren die Geburtsstunde der Funktionentheorie. Der Brief von GAUSS wurde erst 1880 veröffentlicht (Werke 8, 90–92); es ist wahrscheinlich, daß die hier entwickelte Auffassung GAUSS schon lange vor Abfassung seines Briefes geläufig war. GAUSS kennt, wie sein Schreiben im einzelnen zeigt, bereits 1811 den Cauchyschen Integralsatz. Am eigentlichen Aufbau der Funktionentheorie beteiligte sich GAUSS aber nicht; allerdings waren ihm die Prinzipien der Theorie wohl vertraut, so schreibt er z.B. an anderer Stelle (Werke 10, 1, S. 405; keine Jahresangabe, aber nach 1831): Die vollständige Erkenntniß der Natur einer analytischen Function muß auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schließen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente. Unerläßlich ist es daher auch, daß die ursprüngliche Festsetzung des Begriffs der Function sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Größengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Größen unter dem gemeinschaftlichen Namen der complexen Größen in sich begreift.

Wiedergegeben mit freundlicher Genehmigung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

L. Euler 1707–1783

A.L. Cauchy 1789–1857

B. Riemann 1826–1866

K. Weierstrass 1815–1897

Federzeichnungen von Martina Koecher

2. Erste Ansätze zur Funktionentheorie finden sich im 18. Jahrhundert bei L. EULER (1707–1783). Er hatte „eine für die meisten seiner Zeitgenossen unbegreifliche Vorliebe für die komplexen Größen, mit deren Hilfe es ihm gelungen war, den Zusammenhang zwischen den Kreisfunktionen und der Exponentialfunktion herzustellen. ... In der Theorie der elliptischen Integrale entdeckte er das Additionstheorem, machte er auf die Analogie dieser Integrale mit den Logarithmen und den zyklometrischen Funktionen aufmerksam. So hatte er alle Fäden in der Hand, daraus später das wunderbare Gewebe der Funktionentheorie gewirkt wurde" (G. FROBENIUS: *Rede auf L. Euler* anläßlich Eulers 200. Geburtstags 1907, Ges. Abhandl. 3, S. 733).

Die moderne Funktionentheorie wurde im 19. Jahrhundert entwickelt. Die Pioniere der Gründerjahre sind:

A.L. CAUCHY (1789–1857), B. RIEMANN (1826–1866),

K. WEIERSTRASS (1815–1897).

Jeder von ihnen prägte die Theorie auf seine Art, so sprechen wir noch heute vom CAUCHYschen bzw. RIEMANNschen bzw. WEIERSTRASSschen Standpunkt.

CAUCHY hat seine ersten Arbeiten zur Funktionentheorie in den Jahren 1814–1825 geschrieben. Der Funktionsbegriff ist wie bei seinen Vorgängern aus der Eulerzeit noch recht unbestimmt. Eine holomorphe Funktion ist für CAUCHY im wesentlichen eine komplex-differenzierbare Funktion, die eine stetige Ableitung hat. Die CAUCHYsche Funktionentheorie basiert auf seinem berühmten Integralsatz und auf dem Begriff des Residuums. *Jede* holomorphe Funktion hat eine natürliche Integraldarstellung und wird so den Methoden der Analysis zugänglich. Die CAUCHYsche Theorie wurde durch J. LIOUVILLE (1809–1882) vervollständigt, [Liou]; das Buch [BB] von Ch. BRIOT und J-C. BOUQUET (1859) vermittelt einen sehr guten Eindruck vom damaligen Stand der Theorie.

Riemanns epochemachende Göttinger Inauguraldissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* [R] erschien 1851. Bei RIEMANN steht die geometrische Auffassung im Mittelpunkt: holomorphe Funktionen sind Abbildungen zwischen Bereichen in der Zahlenebene $\mathbb{C}$, allgemeiner zwischen Riemannschen Flächen, die in ihren „entsprechenden kleinsten Theilen ähnlich sind". RIEMANN schöpfte seine Ideen u.a. aus der Anschauung und den Erfahrungen in der mathematischen Physik: die Existenz von Strömungen ist ihm Beweis genug, daß holomorphe (= konforme) Abbildungen existieren. Nicht durch Formeln, sondern durch „innerliche charakteristische" Eigenschaften, aus welchen die äußerlichen Darstellungsformen mit Notwendigkeit entspringen, sucht er – mit einem Minimum an Rechnung – seine Funktionen zu verstehen.

Für WEIERSTRASS ist der Ausgangspunkt die Potenzreihe; holomorphe Funktionen sind solche Funktionen, die lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind. Funktionentheorie ist die Theorie dieser Reihen und wird ganz einfach und weitgehend algebraisch begründet. Die Anfänge dieser Auffassung gehen auf J.L. LAGRANGE zurück, der 1797 in seiner *Théorie des fonctions ana-*

lytiques (2. Aufl. Courcier, Paris 1813) den Satz beweisen wollte, daß jede stetige Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Seit LAGRANGE spricht man von *analytischen* Funktionen; man hat vermutet, daß damit solche Funktionen herausgestellt werden sollten, die in der Analysis brauchbar sind. F. KLEIN schreibt: „Die große Leistung von Weierstraß ist es, die im Formalen stecken gebliebene Idee von Lagrange ausgebaut und vergeistigt zu haben" (vgl. [G5], S. 254). Und CARATHÉODORY sagt ([5], S. 5): WEIERSTRASS konnte „die Funktionentheorie arithmetisieren und ein System entwickeln, das an Strenge und Schönheit nicht übertroffen werden kann".

3. Die drei methodisch völlig verschiedenen und doch äquivalenten Zugänge zur Funktionentheorie machen einen besonderen Reiz dieser Theorie aus. Es entsteht gelegentlich der Eindruck, daß CAUCHY, RIEMANN und WEIERSTRASS ihre Auffassungen beinahe „ideologisch" vertreten hätten. Dem ist nicht so. CAUCHY entwickelte bereits 1831 seine holomorphen Funktionen in Potenzreihen und arbeitete mit diesen. RIEMANN lag jede starre Einseitigkeit fern: er machte für sich nutzbar, was er vorfand; so hat er auch Potenzreihen in seiner Funktionentheorie verwendet. Und WEIERSTRASS wiederum hat Integrale keineswegs prinzipiell abgelehnt: bereits 1841 - zwei Jahre vor LAURENT - entwickelte er holomorphe Funktionen in Kreisringen mittels Integralformeln in Laurentreihen, [W_1].

H. POINCARÉ urteilt 1898 in seinem Artikel *L'œuvre mathématique de Weierstrass*, Acta Math. 22, 1-18 (vgl. S. 6/7): „La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géometrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstraß, et il est aisé de comprendre comment elle pouvait, en se développant dans deux sens différents, donner naissance à l'une et à l'autre. ... La méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstraß est avant tout une méthode de démonstration."

Seit langem sind die CAUCHYsche, die RIEMANNsche und die WEIERSTRASSsche Gedankenwelt untrennbar miteinander verwoben; dadurch wurden nicht nur viele Vereinfachungen in der Darstellung möglich, sondern es konnten auch große neue Resultate entdeckt werden.

Die Funktionentheorie feierte im vergangenen Jahrhundert in kürzester Zeit größte mathematische Triumphe. In wenigen Jahrzehnten wurde ein Lehrgebäude geschaffen, das sofort höchste Wertschätzung in der mathematischen Welt fand. So kann man etwa frei nach R. DEDEKIND sagen (vgl. Math. Werke 1, S. 105/106): „Die erhabenen Schöpfungen dieser Theorie haben die Bewunderung der Mathematiker vor allem deshalb erregt, weil sie in fast beispielloser Weise die Wissenschaft mit einer außerordentlichen Fülle ganz neuer Gedanken befruchtet und vorher gänzlich unbekannte Felder zum ersten Male der Forschung erschlossen haben. Mit der Cauchyschen Integralformel, dem Riemannschen Abbildungssatz und dem Weierstraßschen Potenzreihenkalkül wird nicht bloß der Grund zu einem neuen Teile der Mathematik gelegt, sondern es wird zugleich auch das erste und bis jetzt noch immer fruchtbarste Beispiel des innigen Zusammenhangs zwischen Analysis und Algebra geliefert. Aber es ist nicht bloß der wunderbare Reichtum an neuen Ideen und großen Entdeckungen, welche die neue Theorie liefert; vollständig ebenbürtig stehen dem die Kühnheit und Tiefe der Methoden gegenüber, durch welche die größten

Schwierigkeiten überwunden und die verborgensten Wahrheiten, die mysteria functiorum, in das hellste Licht gesetzt werden."

Solchen schwärmerischen Sätzen ist auch aus heutiger Sicht nichts hinzuzufügen. Die Funktionentheorie mit ihrem schier unerschöpflichen Reichtum an schönen und tiefen Sätzen ist, wie C.L. Siegel es gelegentlich in seinen Vorlesungen ausdrückte, ein einmaliges Geschenk an die Mathematiker.